

Zestaw 8 - Funkcje zmiennych losowych II

Artur Fortuna
AGH

Dziś będzie ogólna metoda, jest trudniejsza, ale działa zawsze.
Musimy znać:

- $F_X(x)$ - dystrybuantę X
- $g(x)$

Dziś będzie ogólna metoda, jest trudniejsza, ale działa zawsze.
Musimy znać:

- $F_X(x)$ - dystrybuantę X
- $g(x)$

Szukamy:

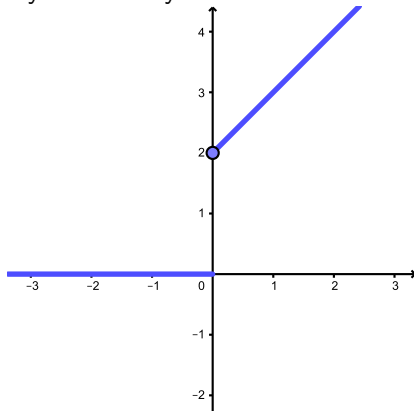
- $F_Y(x)$ - dystrybuanty Y

Dla przykładu niech będzie funkcja $g(X) = \begin{cases} X + 2, & X \geq 0 \\ 0, & X < 0 \end{cases}$.

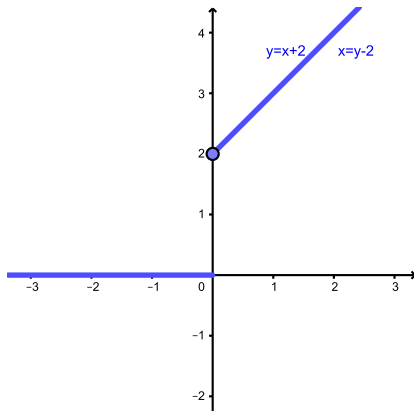
Funkcje zmiennych losowych II

Dla przykładu niech będzie funkcja $g(X) = \begin{cases} X + 2, & X \geq 0 \\ 0, & X < 0 \end{cases}$.

Zaczynamy od narysowania wykresu.

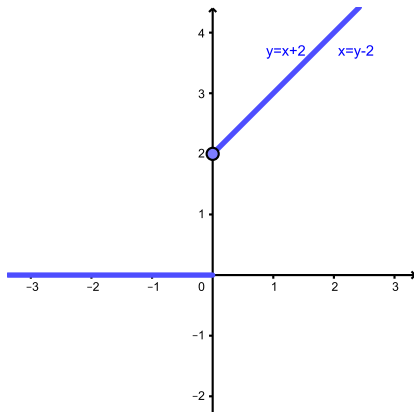


Funkcje zmiennych losowych II



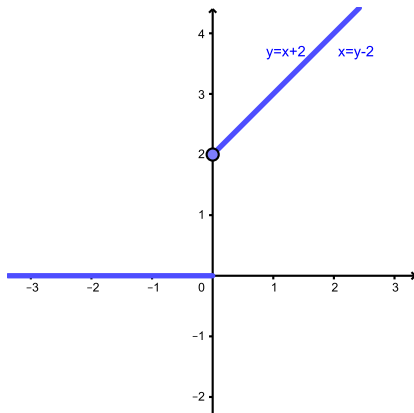
Kawałki wykresu (inne niż poziome) podpisujemy, ale ważne, również w postaci $x = \dots$.

Funkcje zmiennych losowych II



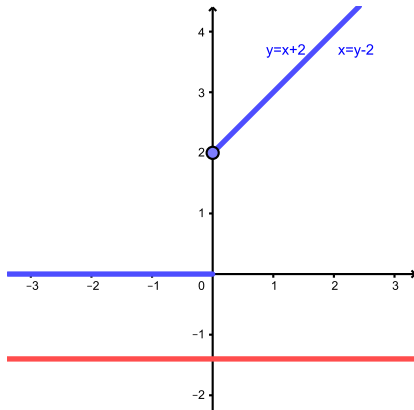
Teraz będziemy wyznaczać pewne zbiory I_y .

Funkcje zmiennych losowych II



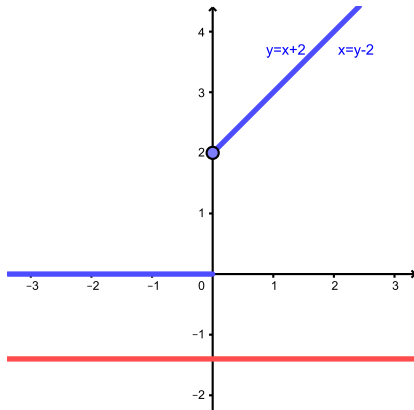
Co to jest I_y ? To zbiór wszystkich x , dla których wykres funkcji g jest poniżej danego y .

Funkcje zmiennych losowych II



Dla jakich x wykres g jest poniżej?

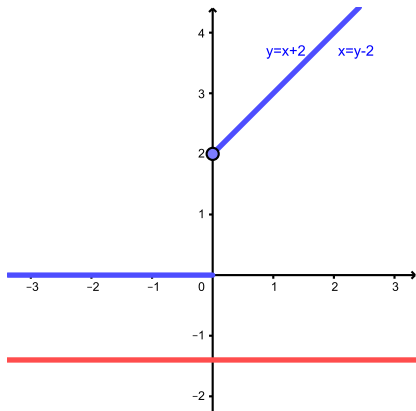
Funkcje zmiennych losowych II



Dla jakich x wykres g jest poniżej?

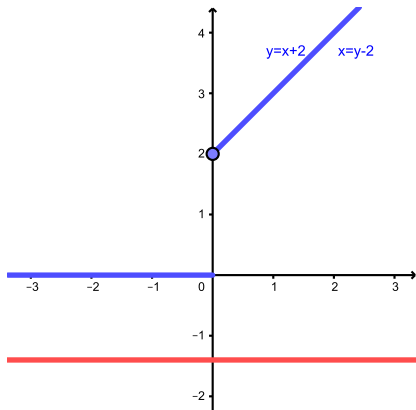
$\emptyset$.

Funkcje zmiennych losowych II



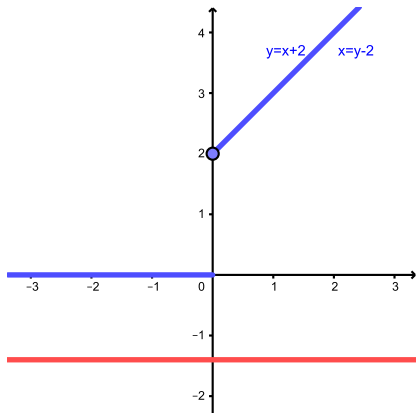
Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię?

Funkcje zmiennych losowych II



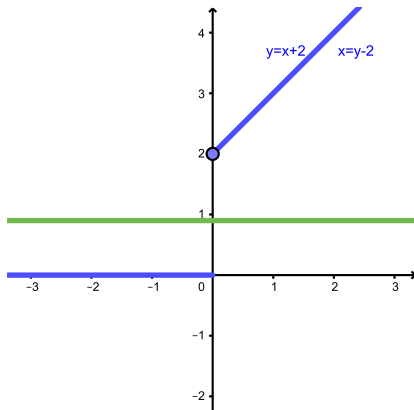
Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię? $y \in (-\infty, 0 >$.

Funkcje zmiennych losowych II



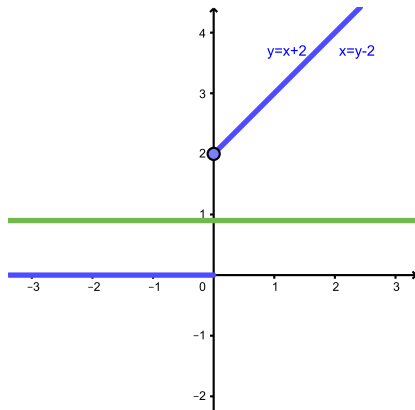
W takim razie $I_Y = \begin{cases} \emptyset, & y \in (-\infty, 0 > \\ \dots, & y \in \dots \\ \dots, & y \in \dots \end{cases}$

Funkcje zmiennych losowych II



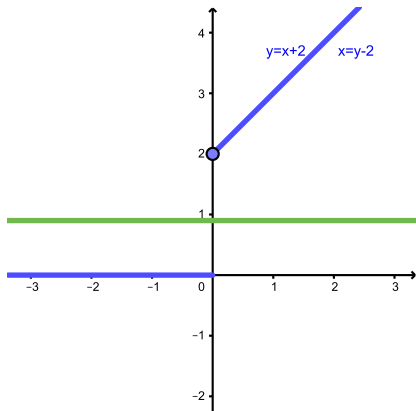
Dla jakich x wykres g jest poniżej?

Funkcje zmiennych losowych II



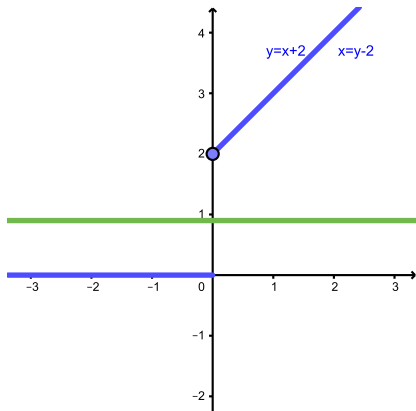
Dla jakich x wykres g jest poniżej?
 $(-\infty, 0)$.

Funkcje zmiennych losowych II



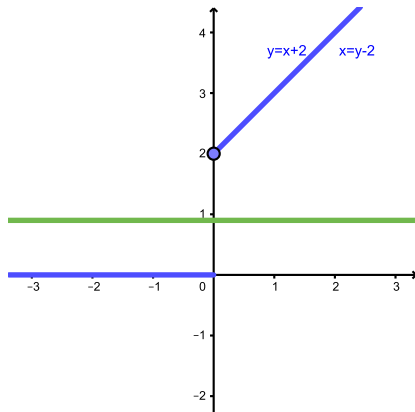
Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię?

Funkcje zmiennych losowych II



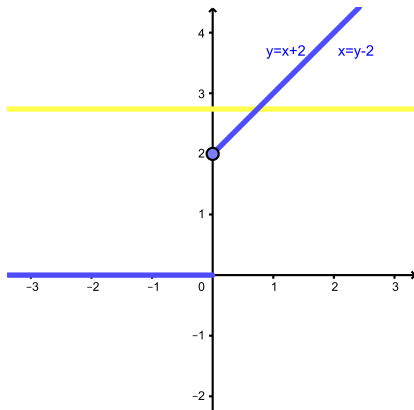
Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię? $y \in (0, 2 >.$

Funkcje zmiennych losowych II



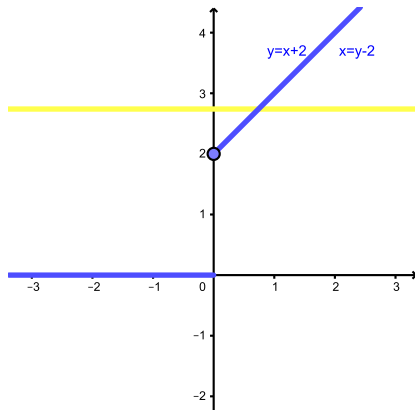
W takim razie $I_Y = \begin{cases} \emptyset, & y \in (-\infty, 0 > \\ (-\infty, 0), & y \in (0, 2 > \\ \dots, & y \in \dots \end{cases}$

Funkcje zmiennych losowych II



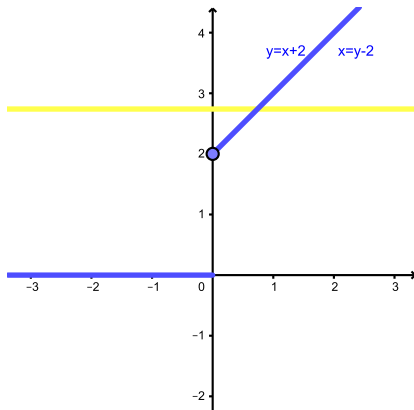
Dla jakich x wykres g jest poniżej?

Funkcje zmiennych losowych II



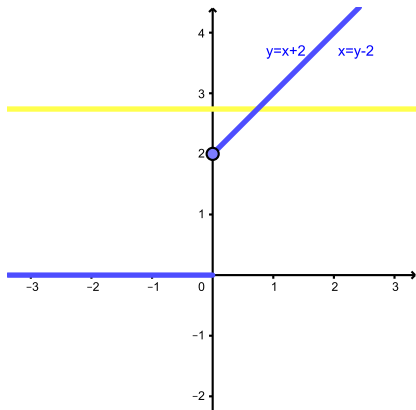
Dla jakich x wykres g jest poniżej?
 $(-\infty, y - 2)$.

Funkcje zmiennych losowych II



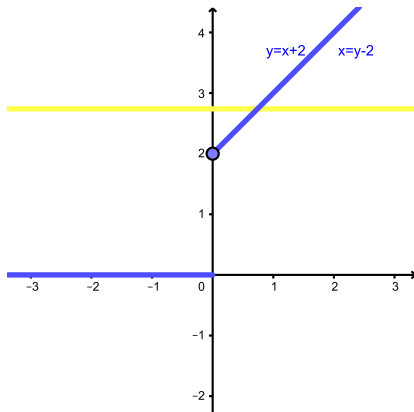
Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię?

Funkcje zmiennych losowych II



Dla jakich y dostaniemy taką samą odpowiedź? Czyli inaczej, jak możemy przesunąć tę linię? $y \in (2, +\infty >$.

Funkcje zmiennych losowych II



W takim razie $I_Y = \begin{cases} \emptyset, & y \in (-\infty, 0 > \\ (-\infty, 0), & y \in (0, 2 > \\ (-\infty, y-2), & y \in (2, +\infty > \end{cases}$

Żeby pójść dalej trzeba wiedzieć, że:

$$F_Y(y) = P(X \in I_y)$$

Przypomnijmy:

$$I_Y = \begin{cases} \emptyset, & y \in (-\infty, 0 > \\ (-\infty, 0), & y \in (0, 2 > \\ (-\infty, y - 2), & y \in (2, +\infty > \end{cases}.$$

Przypomnijmy:

$$I_Y = \begin{cases} \emptyset, & y \in (-\infty, 0 > \\ (-\infty, 0), & y \in (0, 2 > \\ (-\infty, y-2), & y \in (2, +\infty > \end{cases}.$$

W takim razie:

$$F_Y(y) = \begin{cases} P(X \in \emptyset), & y \in (-\infty, 0 > \\ P(X \in (-\infty, 0)), & y \in (0, 2 > \\ P(X \in (-\infty, y-2)), & y \in (2, +\infty > \end{cases}.$$

Przypomnijmy:

$$F_Y(y) = \begin{cases} P(X \in \emptyset), & y \in (-\infty, 0 > \\ P(X \in (-\infty, 0)), & y \in (0, 2 > \\ P(X \in (-\infty, y - 2)), & y \in (2, +\infty > \end{cases} .$$

Przypomnijmy:

$$F_Y(y) = \begin{cases} P(X \in \emptyset), & y \in (-\infty, 0 > \\ P(X \in (-\infty, 0)), & y \in (0, 2 > \\ P(X \in (-\infty, y-2)), & y \in (2, +\infty > \end{cases}.$$

Czyli:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0 > \\ F_X(0), & y \in (0, 2 > \\ F_X(y-2), & y \in (2, +\infty > \end{cases}.$$

Aby pójść dalej potrzebujemy znać dystrybuantę X .

Aby pójść dalej potrzebujemy znać dystrybuantę X .

Na przykład:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2 > \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0 > \\ F_X(0), & y \in (0, 2 > \\ F_X(y-2), & y \in (2, +\infty > \end{cases}.$$

Funkcje zmiennych losowych II

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ F_X(0), & y \in (0, 2) \\ F_X(y-2), & y \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

$F_X(0)$ odczytujemy z wzoru.

Funkcje zmiennych losowych II

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ F_X(0), & y \in (0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

$F_X(0)$ odczytujemy z wzoru.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in (0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in (0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

Funkcje zmiennych losowych II

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in (0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem.

Funkcje zmiennych losowych II

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in (0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem. Do F_X podstawiamy (za x) $y - 2$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in (0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem. Do F_X podstawiamy (za x) $y - 2$. Ale $y \in (2, +\infty)$, w takim razie $y - 2 \in (0, +\infty)$.

Funkcje zmiennych losowych II

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in (0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem. Do F_X podstawiamy (za x) $y - 2$. Ale $y \in (2, +\infty)$, w takim razie $y - 2 \in (0, +\infty)$. Który to będzie wzór w F_X ?

Funkcje zmiennych losowych II

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in (0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem. Do F_X podstawiamy (za x) $y - 2$. Ale $y \in (2, +\infty)$, w takim razie $y - 2 \in (0, +\infty)$. Który to będzie wzór w F_X ? Wzór II i III.

Funkcje zmiennych losowych II

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in (0, 2) \\ F_X(y - 2), & y \in (2, +\infty) \end{cases}.$$

Z $F_X(y - 2)$ jest pewien problem. Do F_X podstawiamy (za x) $y - 2$. Ale $y \in (2, +\infty)$, w takim razie $y - 2 \in (0, +\infty)$. Który to będzie wzór w F_X ? Wzór II i III. W takim razie musimy dokonać podziału.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2 > \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$y - 2 \in (0, +\infty >$$

$y - 2 \in (0, 2 >$	$y - 2 \in (2, +\infty >$
$y \in (2, 4 >$	$y \in (4, +\infty >$
wzór II	wzór III

Zbierzmy to razem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in (0, 2) \\ \frac{1}{3}(y - 2) + \frac{1}{3}, & y \in (2, 4) \\ 1, & y \in (4, +\infty) \end{cases}.$$

Zbierzmy to razem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1, 2) \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}.$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{3}, & y \in (0, 2) \\ \frac{1}{3}(y - 2) + \frac{1}{3}, & y \in (2, 4) \\ 1, & y \in (4, +\infty) \end{cases}.$$

A znając dystrybuantę możemy policzyć rozkład co robiliśmy już w zestawie 5.

Powodzenia!
Proszę pytać jeśli coś jest niejasne.