

Zestaw 10 - Centralne twierdzenie graniczne

Artur Fortuna
AGH

Centralne twierdzenie graniczne

Założmy, że mamy wiele razy (n razy) powtarzane doświadczenie o tym samym rozkładzie (oznaczymy je X_i).

Centralne twierdzenie graniczne

Założmy, że mamy wiele razy (n razy) powtarzane doświadczenie o tym samym rozkładzie (oznaczymy je X_i). Te zdarzenia muszą być niezależne, tzn. ich wyniki nie mogą zależeć od wyniku innych doświadczeń. W zadaniach nie sprawdzamy tego, w zastosowaniach praktycznych trzeba mieć przekonanie, że niezależne są.

Centralne twierdzenie graniczne

Założmy, że mamy wiele razy (n razy) powtarzane doświadczenie o tym samym rozkładzie (oznaczymy je X_i). Te zdarzenia muszą być niezależne, tzn. ich wyniki nie mogą zależeć od wyniku innych doświadczeń. W zadaniach nie sprawdzamy tego, w zastosowaniach praktycznych trzeba mieć przekonanie, że niezależne są. Interesuje nas suma wyników zdarzeń. $S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$.

Centralne twierdzenie graniczne

Na początek musimy wiedzieć (muszą być podane lub musimy policzyć sami) trzy rzeczy:

- n - liczbę doświadczeń

Centralne twierdzenie graniczne

Na początek musimy wiedzieć (muszą być podane lub musimy policzyć sami) trzy rzeczy:

- n - liczbę doświadczeń
- m - wartość oczekiwana pojedynczego zdarzenia X_i

Centralne twierdzenie graniczne

Na początek musimy wiedzieć (muszą być podane lub musimy policzyć sami) trzy rzeczy:

- n - liczbę doświadczeń
- m - wartość oczekiwana pojedynczego zdarzenia X_i
- σ - odchylenie standardowe pojedynczego zdarzenia X_i

Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć.

Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np. $P(300 < S_n < 400)$.

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np. $P(300 < S_n < 400)$. Przepisujemy to w języku dystrybuanty.

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np. $P(300 < S_n < 400)$. Przepisujemy to w języku dystrybuanty.

$$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300^+).$$

Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np. $P(300 < S_n < 400)$. Przepisujemy to w języku dystrybucyj.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300^+)$. Ten znak granicy spokojnie możemy zignorować.

Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np. $P(300 < S_n < 400)$. Przepisujemy to w języku dystrybucyjności.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300^+)$. Ten znak granicy spokojnie możemy zignorować.

$$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300).$$

Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np. $P(300 < S_n < 400)$. Przepisujemy to w języku dystrybuanty.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300^+)$. Ten znak granicy spokojnie możemy zignorować.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300)$. Dystrybuanty S_n nie znamy, ale to nic bo teraz wkracza CTG.

Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np. $P(300 < S_n < 400)$. Przepisujemy to w języku dystrybuanty.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300^+)$. Ten znak granicy spokojnie możemy zignorować.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300)$. Dystrybuanty S_n nie znamy, ale to nic bo teraz wkracza CTG.

$$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300) \approx \Phi\left(\frac{400 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{300 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Centralne twierdzenie graniczne

Teraz najtrudniejsza część. Trzeba zapisać z treści zadania to co należy policzyć. Np. $P(300 < S_n < 400)$. Przepisujemy to w języku dystrybuanty.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300^+)$. Ten znak granicy spokojnie możemy zignorować.

$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300)$. Dystrybuanty S_n nie znamy, ale to nic bo teraz wkracza CTG.

$$P(300 < S_n < 400) = F_{S_n}(400) - F_{S_n}(300) \approx \Phi\left(\frac{400 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{300 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

A że n , m i σ znamy to zostało już tylko odczytać wynik z tablic.

Centralne twierdzenie graniczne

Czasem w zadaniach nie znamy któregoś elementu (np. n). Za to znamy wynik (np. prawdopodobieństwo jest równe albo większe lub równe niż ...).

Centralne twierdzenie graniczne

Czasem w zadaniach nie znamy któregoś elementu (np. n). Za to znamy wynik (np. prawdopodobieństwo jest równe albo większe lub równe niż ...). Postępujemy dokładnie tak jakbyśmy wszystko znali, stosujemy CTG i rozwiązujemy równanie szukając nieznanego parametru.

Centralne twierdzenie graniczne

Np. $m = 5$, $\sigma = 2$ znajdź n takie, że $P(S_n < 100) \geq 0,99$.

Centralne twierdzenie graniczne

Np. $m = 5$, $\sigma = 2$ znajdź n takie, że $P(S_n < 100) \geq 0,99$.

$$P(S_n < 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

Centralne twierdzenie graniczne

Np. $m = 5$, $\sigma = 2$ znajdź n takie, że $P(S_n < 100) \geq 0,99$.

$$P(S_n < 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

Centralne twierdzenie graniczne

Np. $m = 5$, $\sigma = 2$ znajdź n takie, że $P(S_n < 100) \geq 0,99$.

$$P(S_n < 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

Centralne twierdzenie graniczne

Np. $m = 5$, $\sigma = 2$ znajdź n takie, że $P(S_n < 100) \geq 0,99$.

$$P(S_n < 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}(0,99)$$

Centralne twierdzenie graniczne

Np. $m = 5$, $\sigma = 2$ znajdź n takie, że $P(S_n < 100) \geq 0,99$.

$$P(S_n < 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}(0,99)$$

$$\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}} \geq 2,33$$

Centralne twierdzenie graniczne

Np. $m = 5$, $\sigma = 2$ znajdź n takie, że $P(S_n < 100) \geq 0,99$.

$$P(S_n < 100) = F_{S_n}(100) \approx \Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{100 - nm}{\sigma\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\Phi\left(\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}}\right) \geq 0,99$$

$$\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}(0,99)$$

$$\frac{100 - 5n}{2\sqrt{n}} \geq 2,33$$

A dalej już prosto, prawda?

I bardzo ważna uwaga. W praktyce CTG stosujemy, o ile:

$$n \geq 30$$

Centralne twierdzenie graniczne

I bardzo ważna uwaga. W praktyce CTG stosujemy, o ile:

$$n \geq 30$$

Dla mniejszych nie, za duże błędy, trzeba sobie poradzić inaczej.

Powodzenia!

Proszę pytać jeśli coś jest niejasne.