

1. Korzystając z algorytmu Euklidesa znajdź $\text{NWD}(54, 135)$ oraz $\text{NWD}(253, 713)$ oraz przedstaw je jako kombinacje całkowitoliczbowe danych liczb.
2. Udowodnij, że $5n + 3$ i $7n + 4$ są względnie pierwsze dla dowolnego n .
3. Wykorzystując algorytm Euklidesa znajdź element odwrotny do 7 w $\mathbb{Z}_{31}^*$ oraz $\mathbb{Z}_{137}^*$.
4. Znajdź taką liczbę całkowitą a , że $a \equiv 4 \pmod{6}$ i $a \equiv 5 \pmod{35}$.
5. Znajdź taką liczbę całkowitą a , że $a \equiv 4 \pmod{7}$ i $a \equiv 1 \pmod{19}$.
6. Znajdź taką liczbę całkowitą a , że $a \equiv 38 \pmod{103}$ i $a \equiv 81 \pmod{83}$.
7. Znajdź taką liczbę całkowitą a , że $a \equiv 38 \pmod{91}$, $a \equiv 81 \pmod{83}$ i $a \equiv 3 \pmod{95}$.
8. Znajdź taką liczbę całkowitą a , że $a \equiv 1 \pmod{4}$, $a \equiv 2 \pmod{13}$ i $a \equiv 1 \pmod{7}$ i $a \equiv 2 \pmod{17}$.
9. Znajdź taką liczbę całkowitą a , że $a \equiv 3 \pmod{4}$, $a \equiv 4 \pmod{11}$ i $a \equiv 5 \pmod{7}$ i $a \equiv 6 \pmod{13}$.
10. Wypisz wszystkie elementy grup $\mathbb{Z}_7$, $\mathbb{Z}_7^*$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_8^*$.
11. Znajdź najmniejszy generator grupy $\mathbb{Z}_{31}^*$.
12. Znajdź wszystkie podgrupy $\mathbb{Z}_6$.
13. Czy zbiór $\mathbb{Z}_2$ jest podgrupą grupy $\mathbb{Z}_4$?
14. Wyznacz wszystkie podgrupy grupy $\mathbb{Z}_8^*$.
15. Czy liczba 3 jest generatorem $\mathbb{Z}_{53}^*$?
16. Czy cykliczna jest grupa $(\mathbb{Z}, \oplus)$, gdzie działanie $\oplus$ określone jest wzorem $a \oplus b = a + b - 5$. Jeśli tak, to wyznacz generatory tej grupy.
17. Która z grup jest cykliczna: $\mathbb{Z}_5^*$, $\mathbb{Z}_8^*$, $\mathbb{Z}_{15}^*$?
18. Dla każdego $a \in \mathbb{Z}_9^*$ wyznacz podgrupę $\langle a \rangle$ i określ rza. Czy $\mathbb{Z}_9^*$ jest grupą cykliczną?
19. Dla każdego $a \in \mathbb{Z}_{14}^*$ wyznacz podgrupę $\langle a \rangle$ i określ rza. Czy $\mathbb{Z}_{14}^*$ jest grupą cykliczną?

-
20. Wyznacz liczby pierwsze p, q wiedząc, że $n = p \cdot q = 221$ oraz $\varphi(n) = 192$.
21. Wyznacz liczby pierwsze p, q wiedząc, że $n = p \cdot q = 414847$ oraz $\varphi(n) = 413280$.
22. Oblicz wartość wyrażenia $4^8 \pmod{9}$.
23. Oblicz wartość wyrażenia $7^{74} \pmod{30}$.
24. Oblicz wartość wyrażenia $7^{100} \pmod{48}$.