

1. Udowodnij, że w dowolnym grafie G istnieją dwa różne wierzchołki $x, y \in V(G)$ takie, że $d(x) = d(y)$.
2. Graf o 13 krawędziach ma po 3 wierzchołki stopnia 1, 2 i 3. Pozostałe wierzchołki są stopnia 4. Ile wierzchołków ma ten graf?
3. Zbadaj, które z wymienionych poniżej ciągów są ciągami stopni jakiegoś grafu prostego. Narysuj przykładowe grafy realizujące ciągi lub uzasadnij dlaczego jest to niemożliwe.
(4,4,4,3,2,1,1), (4,4,3,2,2,1), (4,4,3,2,1)
4. Dana jest macierz sąsiedztwa pewnego grafu G .

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznacz stopnie wierzchołków grafu G oraz liczbę jego krawędzi. Wyznacz sąsiedztwo każdego z wierzchołków. Narysuj graf G .

5. Wyznacz macierz sąsiedztwa oraz macierz incydencji dla grafu $K_{2,3}$.
6. Podaj przykład dwóch grafów, które mają tę samą liczbę wierzchołków, realizują te same ciągi stopni, ale grafy nie są izomorficzne.
7. Narysuj wszystkie nieizomorficzne grafy rzędu 4 (jest ich 11).
8. Znajdź graf rzędu 4 izomorficzny ze swoim dopełnieniem. Wypisz ten izomorfizm. Podobnie zrób dla grafu rzędu 5. Czy istnieją grafy rzędu 2 oraz 3 izomorficzne ze swoimi dopełnieniami?
9. Dany jest graf $G = (V, E)$, gdzie $V = \{\{i, j\} : i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, i \neq j\}$, przy czym

$$uv \in E \Leftrightarrow u \cap v = \emptyset.$$

Udowodnij, że G jest izomorficzny z grafem Petersena.

10. Przedstaw dopełnienie dwudzielnego grafu pełnego $K_{m,n}$.
11. Wykaż, że jeśli G jest niespójny, to $\overline{G}$ jest spójny.
12. Udowodnij, że każdy graf rzędu n o rozmiarze większym niż $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ jest spójny.

-
13. Pokaż, że jeśli $\delta(G) \geq 2$, to w grafie G istnieje cykl długości przynajmniej $\delta(G) + 1$.
14. Udowodnij, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera cykli nieparzystych.
15. (*) Niech G będzie grafem rzędu $n \geq 3$. Udowodnij indukcyjnie, że jeśli $\|G\| \geq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$, to w grafie G istnieje podgraf K_3 .
Podaj przykład grafu rzędu $n \geq 3$ mającego $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ krawędzi, który nie zawiera K_3 .
16. Udowodnij, że w dowolnym turnieju nie może istnieć więcej niż jedno źródło i więcej niż jedno ujście.
17. Udowodnij indukcyjnie, że w każdym turnieju istnieje centrum, czyli taki wierzchołek, z którego można dojść do dowolnego innego ścieżką skierowaną długości nie większej niż 2.