

Zestaw 10 - wycena opcji

Artur Fortuna
AGH

Musimy przyjąć pewne założenie.

Powszechna obojętność na ryzyko

Musimy przyjąć pewne założenie.

Powszechna obojętność na ryzyko

Inwestorom jest obojętne

Powszechna obojętność na ryzyko

Musimy przyjąć pewne założenie.

Powszechna obojętność na ryzyko

Inwestorom jest obojętne

- czy osiągną pewny zysk w wysokości równej stopie procentowej

Powszechna obojętność na ryzyko

Musimy przyjąć pewne założenie.

Powszechna obojętność na ryzyko

Inwestorom jest obojętne

- czy osiągną pewny zysk w wysokości równej stopie procentowej
- czy też zaryzykują (i zyskają lub tracą) o ile tylko wartość oczekiwana zysku jest równa stopie procentowej

Powszechna obojętność na ryzyko

To założenie brzmi bezsensownie. Dlaczego ktoś miałby godzić się na ryzyko nie mając z tego przeciętnie żadnych większych korzyści niż coś co ma pewne? Zwykle ktoś kto ryzykuje oczekuje jakieś ekstra premii za ryzyko.

Powszechna obojętność na ryzyko

To założenie brzmi bezsensownie. Dlaczego ktoś miałby godzić się na ryzyko nie mając z tego przeciętnie żadnych większych korzyści niż coś co ma pewne? Zwykle ktoś kto ryzykuje oczekuje jakieś ekstra premii za ryzyko. Ale to nabiera sensu, gdy będziemy myśleć, że stopa procentowa to nie jest bezpieczna stopa procentowa w banku tylko np. przeciętny zysk osiągany na giełdzie.

Powszechna obojętność na ryzyko

To założenie brzmi bezsensownie. Dlaczego ktoś miałby godzić się na ryzyko nie mając z tego przeciętnie żadnych większych korzyści niż coś co ma pewne? Zwykle ktoś kto ryzykuje oczekuje jakiejś ekstra premii za ryzyko. Ale to nabiera sensu, gdy będziemy myśleć, że stopa procentowa to nie jest bezpieczna stopa procentowa w banku tylko np. przeciętny zysk osiągany na giełdzie. W takim razie faktycznie inwestorom może być obojętne czy zarobią na danej konkretnej akcji czy na innych na giełdzie o ile oczekiwany zysk jest taki sam.

Model dwumianowy jednookresowy

Opiszemy sobie pewien bardzo prosty model, który jednak ma praktyczne zastosowania.

Model dwumianowy jednookresowy

Opiszemy sobie pewien bardzo prosty model, który jednak ma praktyczne zastosowania.

Przyjmijmy, że akcja kosztuje S i w pewnym okresie czasu jej cena może:

Model dwumianowy jednookresowy

Opiszemy sobie pewien bardzo prosty model, który jednak ma praktyczne zastosowania.

Przyjmijmy, że akcja kosztuje S i w pewnym okresie czasu jej cena może:

- z prawdopodobieństwem równym p wzrosnąć do wartości $S \cdot u$

Model dwumianowy jednookresowy

Opiszemy sobie pewien bardzo prosty model, który jednak ma praktyczne zastosowania.

Przyjmijmy, że akcja kosztuje S i w pewnym okresie czasu jej cena może:

- z prawdopodobieństwem równym p wzrosnąć do wartości $S \cdot u$
- z prawdopodobieństwem równym $1 - p$ spaść do wartości $S \cdot d$

Model dwumianowy jednookresowy

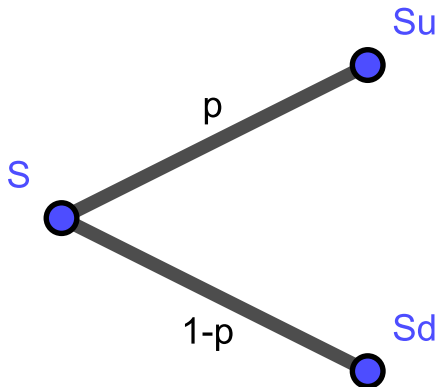
Opiszemy sobie pewien bardzo prosty model, który jednak ma praktyczne zastosowania.

Przyjmijmy, że akcja kosztuje S i w pewnym okresie czasu jej cena może:

- z prawdopodobieństwem równym p wzrosnąć do wartości $S \cdot u$
- z prawdopodobieństwem równym $1 - p$ spaść do wartości $S \cdot d$

Stopa procentowa za ten jeden okres wynosi r i jest podana za ten okres, nie w stosunku rocznym. Stosujemy kapitalizację ciągłą.

Model dwumianowy jednookresowy



Model dwumianowy jednookresowy

Zauważmy, że możemy wyliczyć p .

Model dwumianowy jednookresowy

Zauważmy, że możemy wyliczyć p .

Inwestor, który zainwestuje S złotych wg stopy procentowej r zarobi Se^r .

Model dwumianowy jednookresowy

Zauważmy, że możemy wyliczyć p .

Inwestor, który zainwestuje S złotych wg stopy procentowej r zarobi Se^r .

Inwestor, który w chwili 0 kupi akcje za S po ich sprzedaży w chwili 1 z prawdopodobieństwem p będzie miał Su złotych, a z $1 - p$ będzie miał Sd złotych.

Model dwumianowy jednookresowy

Zauważmy, że możemy wyliczyć p .

Inwestor, który zainwestuje S złotych wg stopy procentowej r zarobi Se^r .

Inwestor, który w chwili 0 kupi akcje za S po ich sprzedaży w chwili 1 z prawdopodobieństwem p będzie miał Su złotych, a z $1 - p$ będzie miał Sd złotych. Wartość oczekiwana jego zarobków to $pSu + (1 - p)Sd$.

Model dwumianowy jednookresowy

Zauważmy, że możemy wyliczyć p .

Inwestor, który zainwestuje S złotych wg stopy procentowej r zarobi Se^r .

Inwestor, który w chwili 0 kupi akcje za S po ich sprzedaży w chwili 1 z prawdopodobieństwem p będzie miał Su złotych, a z $1 - p$ będzie miał Sd złotych. Wartość oczekiwana jego zarobków to $pSu + (1 - p)Sd$.

Ale przecież mamy założenie o powszechnej obojętności na ryzyko!

Model dwumianowy jednookresowy

Zauważmy, że możemy wyliczyć p .

Inwestor, który zainwestuje S złotych wg stopy procentowej r zarobi Se^r .

Inwestor, który w chwili 0 kupi akcje za S po ich sprzedaży w chwili 1 z prawdopodobieństwem p będzie miał Su złotych, a z $1 - p$ będzie miał Sd złotych. Wartość oczekiwana jego zarobków to $pSu + (1 - p)Sd$.

Ale przecież mamy założenie o powszechnej obojętności na ryzyko!
W takim razie:

$$Se^r = pSu + (1 - p)Sd$$

Model dwumianowy jednookresowy

Zauważmy, że możemy wyliczyć p .

Inwestor, który zainwestuje S złotych wg stopy procentowej r zarobi Se^r .

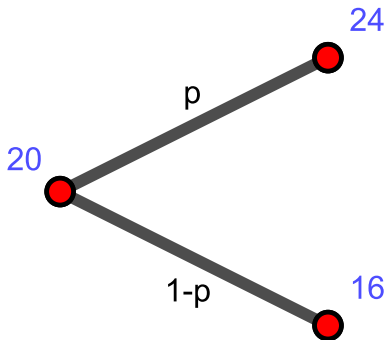
Inwestor, który w chwili 0 kupi akcje za S po ich sprzedaży w chwili 1 z prawdopodobieństwem p będzie miał Su złotych, a z $1 - p$ będzie miał Sd złotych. Wartość oczekiwana jego zarobków to $pSu + (1 - p)Sd$.

Ale przecież mamy założenie o powszechnej obojętności na ryzyko! W takim razie:

$$Se^r = pSu + (1 - p)Sd$$

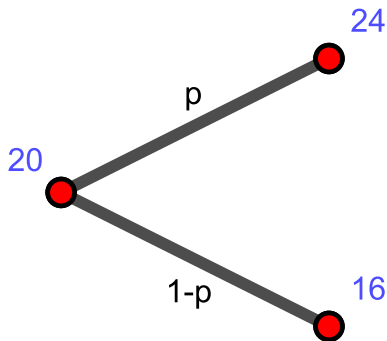
Teraz wystarczy tylko policzyć (to już sami), że $p = \dots$

Model dwumianowy jednookresowy - call



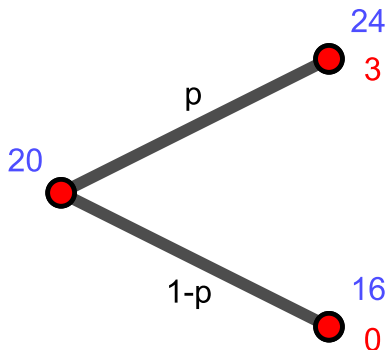
Rozpatrzmy akcję kosztującą 20, której cena może pójść w górę lub w dół o 20%.

Model dwumianowy jednookresowy - call



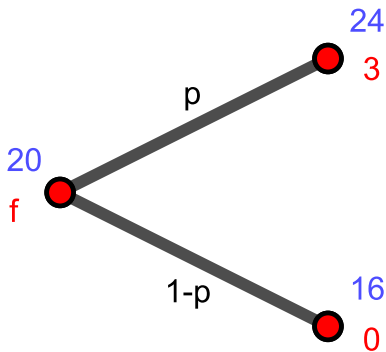
I opcję kupna z ceną realizacji równą 21.

Model dwumianowy jednookresowy - call



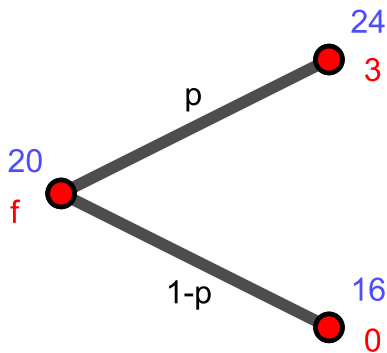
Łatwo policzymy ile zarobimy na opcji kupna ($K = 21$).

Model dwumianowy jednookresowy - call



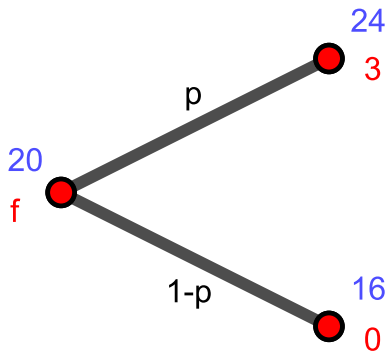
Ale ile wynosi f wartość opcji w chwili 0?

Model dwumianowy jednookresowy - call



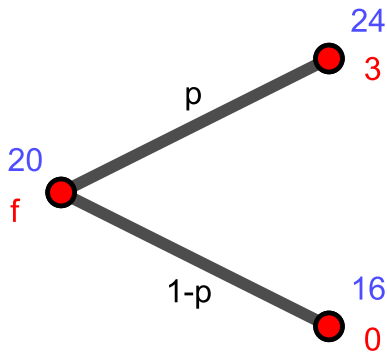
Ciągle działa założenie o powszechnej obojętności na ryzyko.

Model dwumianowy jednookresowy - call



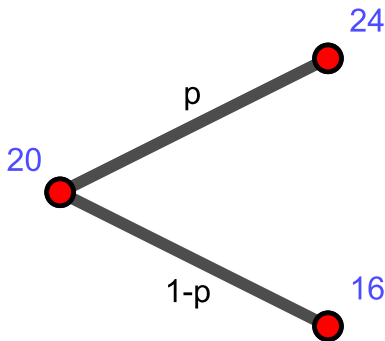
W taki razie f to zdyskontowana wartość oczekiwana.

Model dwumianowy jednookresowy - call



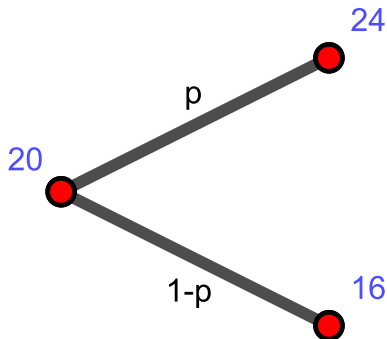
I dalej już samodzielnie $f = \dots$

Model dwumianowy jednookresowy - put



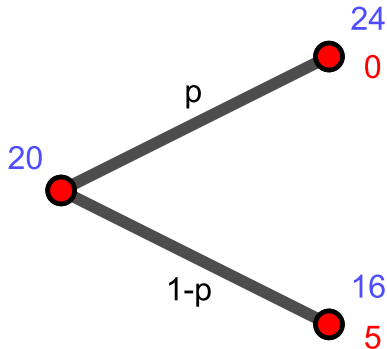
Dla put to samo: akcja kosztująca 20, której cena może pójść w górę lub w dół o 20%.

Model dwumianowy jednookresowy - put



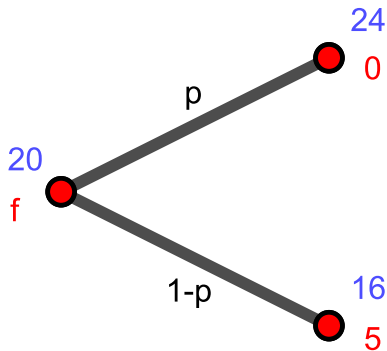
I opcja sprzedaży z ceną realizacji równą 21.

Model dwumianowy jednookresowy - put



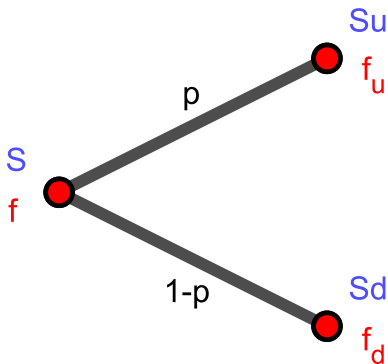
Łatwo policzymy ile zarobimy na opcji sprzedaży ($K = 21$).

Model dwumianowy jednookresowy - put



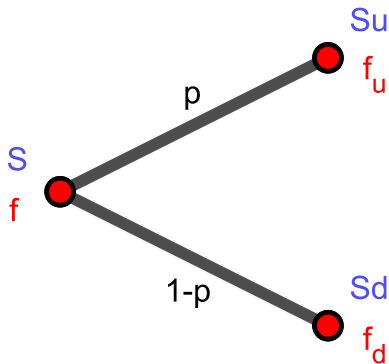
I dalej tak samo liczymy $f = \dots$

Model dwumianowy jednookresowy



Skoro znamy S , u , d , p , r , f_u i f_d to łatwo możemy podać ogólny wzór na f - cenę opcji.

Model dwumianowy jednookresowy



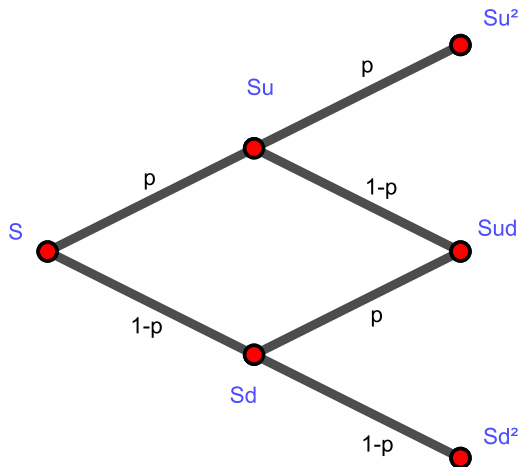
Proszę spróbować samemu. $f = \dots$

Model dwumianowy dwuokresowy

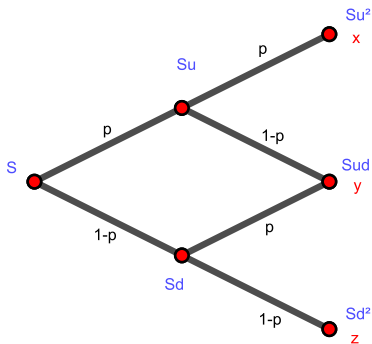
A gdybyśmy rozpatrzyli dwa okresy?

Model dwumianowy dwuokresowy

A gdybyśmy rozpatrzyli dwa okresy?

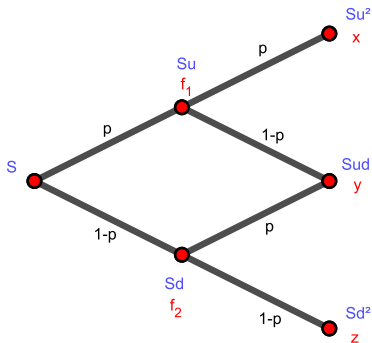


Model dwumianowy dwuokresowy



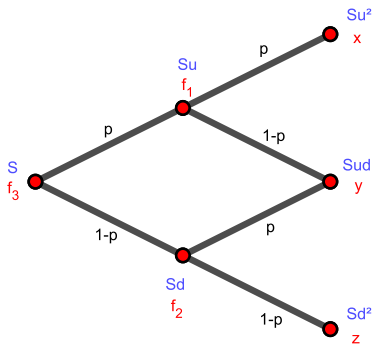
Nic trudnego. Najpierw znając K obliczamy końcowe wartości opcji.

Model dwumianowy dwuokresowy



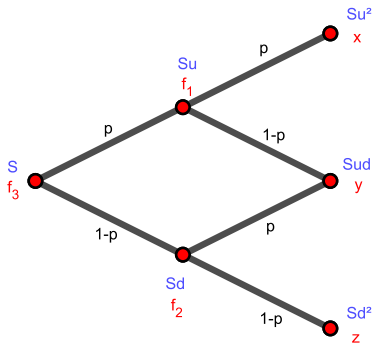
Potem za ich pomocą wycenimy wartość opcji po pierwszym okresie (w środkowych węzłach).

Model dwumianowy dwuokresowy



A potem powtórzmy tę zabawę na węzle w chwili 0 używając otrzymanych w poprzednim kroku liczb.

Model dwumianowy dwuokresowy



Czyli za każdym razem robimy dokładnie to samo co dla jednego okresu.

Tak było dla opcji europejskich. Dla opcji amerykańskich będzie pewna zmiana.

Tak było dla opcji europejskich. Dla opcji amerykańskich będzie pewna zmiana. Przypomnijmy, że posiadacz takiej opcji może ją zrealizować w dowolnym momencie.

Tak było dla opcji europejskich. Dla opcji amerykańskich będzie pewna zmiana. Przypomnijmy, że posiadacz takiej opcji może ją zrealizować w dowolnym momencie. Za każdym razem musi zatem policzyć czy opłaca mu się zrealizować ją od razu czy też jeszcze poczekać.

Tak było dla opcji europejskich. Dla opcji amerykańskich będzie pewna zmiana. Przypomnijmy, że posiadacz takiej opcji może ją zrealizować w dowolnym momencie. Za każdym razem musi zatem policzyć czy opłaca mu się zrealizować ją od razu czy też jeszcze poczekać. W takim razie wartość takiej opcji w każdym węźle to $\max\{A, B\}$, gdzie A to zysk z opcji, gdyby ją zrealizować natychmiast, a B to zdyskontowana wartość oczekiwana, jeśli posiadacz zdecyduje się poczekać.

A co z obiecanyimi zastosowaniami praktycznymi?

A co z obiecanyimi zastosowaniami praktycznymi?

Okresów może być więcej. Wystarczy przyjąć ich na tyle dużo by końcowe wartości w miarę szczelnie zapełniły sensowny przedział możliwych cen.

A co z obiecanymi zastosowaniami praktycznymi?

Okresów może być więcej. Wystarczy przyjąć ich na tyle dużo by końcowe wartości w miarę szczelnie zapełniły sensowny przedział możliwych cen. A skoro umiemy wyceniać opcje dla dwóch okresów to i bez problemu policzymy dla większej liczby okresów.

A co z obiecanyymi zastosowaniami praktycznymi?

Okresów może być więcej. Wystarczy przyjąć ich na tyle dużo by końcowe wartości w miarę szczelnie zapełniły sensowny przedział możliwych cen. A skoro umiemy wyceniać opcje dla dwóch okresów to i bez problemu policzymy dla większej liczby okresów. Takie wyliczenia są łatwe, a dają wynik bardzo dobrze przybliżający wycenę opcji jaką otrzymalibyśmy w bardziej skomplikowanych matematycznie modelach.

Powodzenia!

Proszę pytać jeśli coś jest niejasne.