

Zestaw 1 - liczby zespolone

1. Oblicz:

- a) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$
- b) $(3+i)^3 - (3-i)^3$
- c) $\text{Im} [(2-i)(2+i) - (3-2i)^2]$
- d) $\text{Re} \left[\frac{-i+(-i+1)2i}{1-i} \right]$
- e) $\frac{5-3i}{(-1+2i)^2(3-i)^2}$
- f) $\text{Re} [(1-2i)^3 - i]$
- g) $|(-i+2)^2 + i(1+i)|$
- h) $\text{Im} \left[\frac{2}{(2-5i)^2} \right]$

2. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i wykładniczej:

- a) $-\sqrt{3} - i$
- b) $5 - 5i$
- c) $-2 + 2\sqrt{3}i$
- d) $-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}i$
- e) $-3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$
- f) $\cos \frac{5}{7}\pi - i \sin \frac{5}{7}\pi$
- g) $\sin \frac{5}{7}\pi - i \cos \frac{5}{7}\pi$

3. Oblicz:

- a) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \right)^{30}$
- b) $(1+i)^{100}$
- c) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{1913}$

4. Oblicz:

- a) $\sqrt[4]{1}$

- b) $\sqrt[4]{-16}$
- c) $\sqrt[6]{i}$
- d) $\sqrt[3]{1+i}$
- e) $\sqrt[3]{2-2i}$
- f) $\sqrt[4]{8i\sqrt{3}-8}$
- g) $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}}$

5. Rozwiąż równanie:

- a) $(z-1)^3 = (i-z)^3$
- b) $z^2 = 5 - 12i$
- c) $z^2 + 2z + 5 = 0$
- d) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$
- e) $z^2 - 3iz + 4 = 0$
- f) $z^4 + 3z^2 - 4 = 0$
- g) $z^2|z|^2 = 4$
- h) $(z+2)^2 = (\bar{z}+2)^2$
- i) $|z| + z = 8 + 4i$
- j) $z^7 = \bar{z}$
- k) $z^6 = (\bar{z})^6$
- l) $z^4 = (i-1)^4$
- m) $\overline{z+i} = z-i$
- n) $\bar{z}z^4 = z|z|^2$
- o) $z^7 = \bar{z}(1-i)$
- p) $(iz)^3 = \left(\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9$
- q) $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$

6. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór:

- a) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| < 1\}$
- b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-2i| < 2\}$
- c) $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z}-1+3i| \leq 3\}$
- d) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z+1| = 3\}$

- e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = |z + 2i|\}$
- f) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z^2 < 1\}$
- g) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z^2 < 0\}$
- h) $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} iz < 0\}$
- i) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz + 2) \geq 2\}$
- j) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| < 1\}$
- k) $\{z \in \mathbb{C} : \arg z^6 = \frac{\pi}{2}\}$
- l) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(\bar{z} - 1 - 2i) = \frac{3}{2}\pi\}$
- m) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} < \arg(z - 3) < \frac{\pi}{3}\}$
- n) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg((1 + i)z) < \frac{3}{4}\pi\}$
- o) $\{z \in \mathbb{C} : \sin(\pi|z + 2i|) > 0\}$

7. Wiedząc, że z_0 jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(z)$ znajdź pozostałe pierwiastki gdy:

- a) $z_0 = 2i, W(z) = z^4 + 2z^3 + 9z^2 + 8z + 20$
- b) $z_0 = 1 + i, W(z) = az^3 + bz + 1$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$