

Zestaw 1 - liczby zespolone

1. Oblicz:

a) $\frac{(3-i)(1-4i)}{2-i}$

b) $(3+i)^3 - (3-i)^3$

c) $\operatorname{Im} [(2-i)(2+i) - (3-2i)^2]$

d) $\operatorname{Re} \left[\frac{-i+(-i+1)2i}{1-i} \right]$

e) $\overline{\frac{5-3i}{(-1+2i)^2(3-i)^2}}$

f) $\operatorname{Re} [(1-2i)^3 - i]$

g) $|(-i+2)^2 + i(1+i)|$

h) $\operatorname{Im} \left[\overline{\frac{2}{(2-5i)^2}} \right]$

2. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i wykładniczej:

a) $-\sqrt{3} - i$

b) $5 - 5i$

c) $-2 + 2\sqrt{3}i$

d) $-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2}i$

e) $-3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

f) $\cos \frac{5}{7}\pi - i \sin \frac{5}{7}\pi$

g) $\sin \frac{5}{7}\pi - i \cos \frac{5}{7}\pi$

3. Oblicz:

a) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \right)^{30}$

b) $(1+i)^{100}$

c) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{1913}$

4. Oblicz:

a) $\sqrt[4]{1}$

b) $\sqrt[4]{-16}$

c) $\sqrt[6]{i}$

d) $\sqrt[3]{1+i}$

e) $\sqrt[3]{2-2i}$

f) $\sqrt[4]{8i\sqrt{3}-8}$

g) $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}}$

5. Rozwiąż równanie:

a) $(z-1)^3 = (i-z)^3$

b) $z^2 = 5 - 12i$

c) $z^2 + 2z + 5 = 0$

d) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$

$$\text{e) } z^2 - 3iz + 4 = 0$$

$$\text{f) } z^4 + 3z^2 - 4 = 0$$

$$\text{g) } z^2|z|^2 = 4$$

$$\text{h) } (z + 2)^2 = (\bar{z} + 2)^2$$

$$\text{i) } |z| + z = 8 + 4i$$

$$\text{j) } z^7 = \bar{z}$$

$$\text{k) } z^6 = (\bar{z})^6$$

$$\text{l) } z^4 = (i - 1)^4$$

$$\text{m) } \overline{z + i} = z - i$$

$$\text{n) } \overline{\bar{z}z^4} = z|z|^2$$

$$\text{o) } z^7 = \bar{z}(1 - i)$$

$$\text{p) } (iz)^3 = \left(\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9$$

$$\text{q) } \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right) + 1 = 0$$

6. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór:

a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1 - i| < 1\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 2i| < 2\}$

c) $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} - 1 + 3i| \leq 3\}$

d) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| + |z + 1| = 3\}$

e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = |z + 2i|\}$

f) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z^2 < 1\}$

g) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z^2 < 0\}$

h) $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} iz < 0\}$

i) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz + 2) \geq 2\}$

j) $\{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| < 1\}$

k) $\{z \in \mathbb{C} : \arg z^6 = \frac{\pi}{2}\}$

l) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(\bar{z} - 1 - 2i) = \frac{3}{2}\pi\}$

$$\text{m)} \quad \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} < \arg(z - 3) < \frac{\pi}{3}\}$$

$$\text{n)} \quad \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg((1 + i)z) < \frac{3}{4}\pi\}$$

$$\text{o)} \quad \{z \in \mathbb{C} : \sin(\pi|z + 2i|) > 0\}$$

7. Wiedząc, że z_0 jest jednym z pierwiastków wielomianu $W(z)$ znajdź pozostałe pierwiastki gdy:

$$\text{a)} \quad z_0 = 2i,$$

$$W(z) = z^4 + 2z^3 + 9z^2 + 8z + 20$$

$$\text{b)} \quad z_0 = 1 + i,$$

$$W(z) = az^3 + bz + 1, \text{ gdzie } a, b \in \mathbb{R}$$