

Zestaw 4 - układy równań

1. Rozwiąż układ równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 4z = 0 \\ 4x - 11y + 10z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ -x - 4y - 3z = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -3x + 3y + 2z = 2 \\ x - 4y - 3z = -4 \\ -2x + 2y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y + z = -2 \\ -3y + 2z = -12 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x + y - z = -3 \\ 2x + 3y + z = 7 \\ -x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{f)} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrr} 2x & - & 3y & - & 5z & = & 5 \\ -x & + & y & - & z & = & -5 \\ -3x & - & 4y & - & 3z & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\text{g)} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrr} -x & - & y & - & z & = & 2 \\ -2x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 6 \\ 3x & + & y & + & z & = & -2 \end{array} \right.$$

$$\text{h)} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & z & + & t & = & 3 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 3 \\ 2x & - & y & + & 2z & - & t & = & 3 \\ -x & + & y & + & 3z & + & t & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\text{i)} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrr} 2x & - & y & + & z & & & = & -1 \\ x & + & 2y & - & 3z & - & t & = & -1 \\ 3x & + & & & z & - & 2t & = & -1 \\ -x & - & y & + & z & + & t & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\text{j)} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 11 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & + & t & = & 12 \\ 3x & + & 4y & + & z & + & 2t & = & 13 \\ 4x & + & y & + & 2z & + & 3t & = & 14 \end{array} \right.$$

$$\text{k)} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & - & y & + & z & + & 3t & = & 4 \\ 2x & - & 5y & - & z & & & = & -1 \\ -2x & + & 6y & + & 2z & + & 2t & = & 4 \\ -3x & + & 5y & - & z & - & 5t & = & -6 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
 \text{l)} \quad & \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr} 2x & - & y & - & 3z & + & 4t & = & -5 \\ -3x & - & 2y & - & z & - & t & = & -2 \\ -x & + & y & + & 2z & - & 3t & = & 3 \\ x & + & y & + & z & & & = & 2 \\ -2x & - & 3y & - & z & + & 4t & = & 0 \end{array} \right. \\
 \text{m)} \quad & \left\{ \begin{array}{rrrrrrrr} -3x & + & 2y & - & z & + & 4t & = & -5 \\ -x & - & 3y & - & 2z & - & t & = & -2 \\ 2x & - & y & + & z & - & 3t & = & 3 \\ x & + & y & + & z & & & = & 2 \\ -x & - & 2y & - & 3z & + & 4t & = & 1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

2. Zbadaj w zależności od parametru lub parametrów liczbę rozwiązań układu równań i znajdź te rozwiązania:

$$\text{a)} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrr} x & + & y & + & pz & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 2pz & = & -3 \\ 2x & + & 2y & + & p^2z & = & p \end{array} \right.$$

$$\text{b)} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrr} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a^2 \end{array} \right.$$

$$\text{c)} \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrr} kx & + & ly & + & z & = & a \\ x & + & kly & + & z & = & b \\ x & + & ly & + & kz & = & c \end{array} \right.$$

$$\text{d)} \quad \begin{cases} px & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & py & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2pz & = & 1 \end{cases}$$

$$\text{e)} \quad \begin{cases} x & + & y & + & pz & = & p \\ x & + & py & - & z & = & 1 \\ px & + & y & + & z & = & -1 \end{cases}$$

$$\text{f)} \quad \begin{cases} x & + & py & - & z & = & 1 \\ x & + & 10y & - & 6z & = & p \\ 2x & - & y & + & pz & = & 0 \end{cases}$$

$$\text{g)} \quad \begin{cases} x & + & ky & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & kz & = & 2 \\ kx & + & y & + & z & = & 3 \end{cases}$$

$$\text{h)} \quad \begin{cases} -x & + & ky & + & 2z & = & k \\ (k+1)x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & (k-1)y & + & z & = & k-1 \end{cases}$$

$$\text{i)} \quad \begin{cases} ax & + & y & + & 2z & = & -a \\ -x & + & y & + & 2z & = & b \\ 2x & + & y & + & (a-1)z & = & a+3 \end{cases}$$

$$\text{j)} \quad \begin{cases} (p+1)x & - & y & + & pz & = & 1 \\ (3-p)x & + & 4y & - & pz & = & -4 \\ px & + & 3y & & & = & -3 \end{cases}$$

$$\text{k)} \quad \begin{cases} 3x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & ky & + & z & = & k \\ x & + & y & + & kz & = & m \end{cases}$$

$$1) \quad \begin{cases} 2x & + & py & + & pz & + & pt & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & pz & + & pt & = & 2 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & + & pt & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 2z & + & 2t & = & 4 \end{cases}$$

$$m) \quad \begin{cases} x & + & y & + & z & + & at & = & a^3 \\ x & + & y & + & az & + & t & = & a^2 \\ x & + & ay & + & z & + & t & = & a \\ ax & + & y & + & z & + & t & = & 1 \end{cases}$$

3. Zbadaj dla jakich wartości parametrów k i l istnieją niezerowe rozwiązania układu równań:

$$a) \quad \begin{cases} kx & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ly & + & z & = & 0 \\ x & + & 2ly & + & z & = & 0 \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x & - & ky & - & 3z & = & 0 \\ lx & + & y & + & 5z & = & 0 \\ 2x & + & ky & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{cases}$$

4. Sprawdź czy następujące wektory są liniowo niezależne w $\mathbb{R}^3$:

$$a) \quad (1, 0, 2), (0, 1, 1), (2, 1, 1)$$

b) $(6, 1, 1), (0, 1, 1), (2, 1, 1)$

5. Zbadaj w zależności od parametru a liniową niezależność w $\mathbb{R}^3$ następujących wektorów:

a) $(1, 2, 1), (a, 0, 1), (2, 2, 2)$

b) $(a, a, -2), (1, a, 1), (-3, 0, -3)$