

Zestaw 5 - odwzorowania liniowe

1. Sprawdź czy dane odwzorowanie jest liniowe:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{|x|+1}$$

b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
$$f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
$$f(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
$$f(x, y, z) = (x + y + 1, x + y, z + 2)$$

e) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $f(x, y, z) = (x + 2y, z - x - y)$

2. Znajdź jądro i obraz oraz ich bazy i wymiary oraz sprawdź czy jest monomorfizmem, epimorfizmem lub izomorfizmem następujące odwzorowanie:

a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,
 $f(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$

b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$,
 $f(x, y) = (x+y, 2x+y, 3x+y, 4x+y)$

c) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$,
 $f(x, y, z, t) = (x - y, z + t)$

d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$,
 $f(x, y, z) = (x - 2y + z, -3x + 6y, -x + 2y + 2z, z)$

e) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z, t) = (x - 2z + 3t, -3x - 2y + 6z - 5t, 2x + 3y - 4z, y - 2t)$$

f) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4,$

$$f(x, y, z, t) = (-2x + 2z + 6t, x + y - 3t, -2y - 4z, x - 3z - 3t)$$

3. Wyznacz odwzorowanie liniowe

$f : X \rightarrow Y$, takie, że:

a) $X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^3,$

$$f(1, 2) = (3, -1, 0),$$

$$f(2, 1) = (3, 1, 3)$$

b) $X = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}^2,$

$$f(0, 0, 1) = (0, 1),$$

$$f(0, 1, 1) = (0, 2),$$

$$f(1, 1, 1) = (1, 3)$$

c) $X = \mathbb{R}^3, Y = \mathbb{R}^3,$

$$\text{Ker } f = \text{Lin} \{(1, 1, 0), (1, -1, 0)\},$$

$$\text{Im } f = \text{Lin} \{(2, 1, 1)\}$$

d) $X = \mathbb{R}^2, Y = \mathbb{R}^3,$

$$\text{Ker } f = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\},$$

$$\text{Im } f = \{(x, y, z) : 2x = 3y = 6z\}$$