

Zestaw 6 - macierz odwzorowania liniowego

1. Wyznacz macierz odwzorowania liniowego we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni wektorowych:

a) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, t) = (x + y, z - x - y, t + z)$,
 B_1, B_2 - bazy kanoniczne

b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, y, z)$,
 $B_1 = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$, $B_2 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$

c) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z, t) = (x + y, z + t)$,
 $B_1 = ((1, 0, 0, 0), (1, 2, 0, 0), (1, 2, 3, 0), (1, 2, 3, 4))$,
 $B_2 = ((1, 0), (1, 2))$

2. Wyznacz odwzorowanie liniowe, które w bazach

$$B_1 = B_2 = ((1, 0, 1), (4, -2, 1), (-2, 3, 3)) \text{ ma macierz } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Niech $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazach $B_1 = (v_1, v_2)$, $B_2 = (w_1, w_2, w_3)$.
 Oblicz $f(6v_1 - v_2)$.

4. Niech $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w bazach $B_1 = (v_1, v_2)$, $B_2 = (w_1, w_2)$.
 Oblicz $f^{-1}(2w_1 + w_2)$.

5. Niech $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w bazach $B_1 = B_2 = (v_1, v_2)$.
 Oblicz $f^2(v_1 - 3v_2)$.

6. Dane są odwzorowania liniowe

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (6x - 2y, x - 3y, -y)$,
 $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x, y, z) = (2x - y + z, -x + 2y)$.

Znajdź macierze odwzorowań $f \circ g$ i $g \circ f$ w bazach kanonicznych.

7. Znajdź macierz przejścia z bazy B do bazy B' :

a) w $\mathbb{R}^3$, B -kanoniczna, $B' = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$

b) w $\mathbb{R}^3$, $B = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$, B' -kanoniczna

c) w $\mathbb{R}^3$, $B = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$,
 $B' = ((1, 1, 0), (0, 2, -1), (1, 0, 1))$.

8. Niech $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przejścia z bazy B_1 do bazy $B_2 = ((1, 2, -1), (-1, 1, -2), (1, -1, 1))$. Znajdź wektory bazy B_1 .

9. Niech $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ będzie macierzą przejścia z bazy B_1 do bazy B_2 w $\mathbb{R}^3$. Wektor u ma w bazie B_2 współrzędne $[3, -5, 7]_{B_2}$. Znajdź współrzędne Wektora u w bazie B_1 .

10. Niech $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazach $B_1 = ((1, 1), (-1, 1))$ i B_2 -kanonicznej. Wyznacz macierz tego odwzorowania w bazach B_3 -kanonicznej i $B_4 = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$.

11. Niech $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazach $B_1 = ((2, 1), (3, 1))$ i $B_2 = ((1, 1), (0, 1))$. Wyznacz macierz tego odwzorowania w bazach $B_3 = ((1, 1), (3, 2))$ i $B_4 = ((2, 1), (1, 0))$.

12. Niech $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazach $B_1 = (v_1, v_2)$ i $B_2 = (w_1, w_2, w_3)$. Wyznacz macierz tego odwzorowania w bazach $B_3 = (3v_1 + v_2, v_1 - v_2)$ i $B_4 = (2w_1 - w_3, 4w_2, w_1 - w_3)$.

13. Niech $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ w bazach B_1, B_2 , a $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ macierzą odwzorowania liniowego

$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ w bazach B_2, B_3 . Wyznacz macierz odwzorowania liniowego $g \circ f$ w bazach B_3, B_3 , jeżeli wiadomo, że $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$, $B_2 = (v_1, v_2)$, $B_3 = (w_1, w_2, w_3)$ oraz $w_1 = 2u_2 + u_3$, $w_2 = -u_1$, $w_3 = -u_2 - u_3$.

14. Niech $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Dane są bazy B_1, B_2, B_3 i B_4 oraz A - macierz odwzorowania f w bazie B_1 , C - macierz odwzorowania g w bazach B_3 i B_1 . Znajdź macierz odwzorowania $f \circ g$ w bazach B_4 i B_2 .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 9 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 9 & 1 \\ 6 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)),$$

B_2 - baza kanoniczna,

$$B_3 = (w_1, w_2, w_3),$$

$$B_4 = (w_1 - w_2, w_1 - w_3, -w_1 + w_2 - w_3)$$