SZEREGI LICZBOWE (RZECZYWISTE, ZESPOLONE)

PRZ. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

$S = \dfrac{a_1}{1-q}, |q| < 1$

PRZ.

$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \ldots =$
$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0$
$1(-1+1)(-1+1)(-1+1) - \ldots = 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots = 1$

DEF. Dany jest ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ - n-ta suma częściowa

Szeregiem nazywamy parę $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$

Ozn. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

PRZ. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$
$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$
$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = \frac{8+1}{12} = \frac{3}{4}$
$S_n = \frac{n}{n+1}$ - dowód indukcyjny
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leftrightarrow \left(\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$

DEF. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym $\Leftrightarrow$ istnieje takie $S(\in \mathbb{R}, \mathbb{C})$, że $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$

S - suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

PRZ. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$S_n = \frac{n}{n+1}$,
$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$

PRZ. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

$S_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ nie jest zbieżny

Spostrzeżenie.

zał: $k \in \mathbb{N}$

teza: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ zbieżny

TW. (WK zbieżności szeregu)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

teza: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

PRZ. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (szereg harmoniczny)

spełnia warunek konieczny zbieżności szeregu (ale NIE jest zbieżny)

TW. (o zbieżności szeregów harmonicznych)

zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ (szereg harmoniczny rzędu α)

teza:

$\alpha>1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ jest zbieżny

$\alpha\leqslant 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ nie jest zbieżny

PRZ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

szereg harmoniczny rzędu $\alpha=1$ więc nie jest zbieżny

DEF. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym** $\Leftrightarrow$ gdy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ jest zbieżny.

Jeśli $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, to mówimy, że jest **warunkowo zbieżny**.

TW. (o zbieżności szeregu bezwzględnie zbieżnego)

zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest bezwzględnie zbieżny

teza: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny

PRZ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$

TW. (kryterium d'Alamberta)

zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

$\forall n\in\mathbb{N} \quad a_n\neq 0$

$g=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

teza:

$g<1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny

$g>1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ nie jest zbieżny

TW. (kryterium Cauchy'ego)

zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

$g=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

teza:

$g<1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny

$g>1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ nie jest zbieżny

PRZ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

PRZ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n \cdot n!}{n^n}$

TW. (kryterium porównawcze graniczne ilorazowe)

zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

$\forall n \geqslant n_0 \quad a_n \geqslant 0, b_n > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g \in (0, +\infty)$

teza: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny

PRZ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-2n+3}{n^4+2n^3-2}$

PRZ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n}$

TW. (kryteria porównawcze)

zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

$\forall n \geqslant n_0,\ a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0$

$\forall n \geqslant n_1 \quad a_n \leqslant b_n$

teza:

1) kryterium na zbieżność
Jeśli $\sum b_n$ jest zbieżny $\Rightarrow \sum a_n$ jest zbieżny

2) kryterium na rozbieżność
Jeśli $\sum a_n$ jest rozbieżny $\Rightarrow \sum b_n$ jest rozbieżny

PRZ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n}$

TW. (kryterium całkowe)

zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,$

$\forall n \geqslant n_0 \quad a_n \geqslant 0$

$f : [n_0, +\infty] \to \mathbb{R}_+$

$\forall n \geqslant n_0 \quad a_n = f(n)$

f jest nierosnąca na przedziale $[n_0, +\infty)$

teza: $\sum a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ $\int\limits_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ jest zbieżna

PRZ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$

DEF. Szeregiem naprzemiennym nazywamy szereg postaci

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, gdzie:

1) $\forall n \geqslant 1 \quad a_n > 0$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

3) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest malejący

TW. (kryterium Leibniza)
Szereg naprzemienny jest zbieżny.
Ponadto
$\forall n \in \mathbb{N} \quad |S_n - S| < a_{n+1}$

PRZ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

CIĄGI FUNKCYJNE

$Y = \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}$

DEF. Ciągiem funkcyjnym nazywamy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n : X \to Y$.

DEF. Mówimy, że ciąg funkcyjny $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest **zbieżny punktowo** na $X \Leftrightarrow$ istnieje taka funkcja $f : X \to Y$, że $\forall x \in X\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Funkcję f nazywamy **funkcją graniczną** ciągu funkcyjnego $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
Ozn. $f_n \xrightarrow{X} f$ - ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo na X
$(\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$

PRZ. $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad x \in [0,1]$

DEF. Mówimy, że ciąg funkcyjny $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest **zbieżny jednostajnie** na X
$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
Ozn. $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ - ciąg $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny na X.

TW. (WK na punktową zbieżność)
Jeśli ciąg funkcyjny $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny (do f) na X, to $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest punktowo zbieżny (do f)
$(f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{X} f)$

PRZ. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$

TW. zał: $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \to Y$ ciągłe
$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$
teza: f jest ciągła na X

PRZ. $f_n(x) = x^n$, $X = [0,1]$

DEF. $B(X,Y)$ - zbiór funkcji ograniczonych
$f \in B(X,Y) \overset{def}{\Longleftrightarrow} f : X \to Y$ i $f[X]$ jest ograniczony

DEF. $f, g \in B(X,Y)$
$d_c(f,g) \overset{def}{=} \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$

TW. Funkcja d_c jest metryką (Czebyszewa) w zbiorze $B(X,Y)$

TW. zał: $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in B(X,Y)$
$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}},\ x \in X$
teza: $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d_c(f_n, f) = 0$

PRZ. $f_n(x) = x^n$ na $[0,1)$

PRZ. Zbadaj jednostajną zbieżność ciągu funkcyjnego a) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ na $\mathbb{R}$,
b) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ na $\mathbb{R}$.

PRZ. $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2},\ x \in \mathbb{R}$
Czy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$?

Problem:
$f_n \overset{X}{\to} f$
$f_n' \to f'$?
$x_1, x_2 \in X \quad \int\limits_{x_1}^{x_2} f_n(x)dx \to \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$?

TW. (o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego)
zał: $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \to Y$ jest różniczkowalna
X - przedział $\subset \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$
$f_n \overset{X}{\to} f$
(f_n') jest jednostajnie zbieżny na X
teza: $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in X$

TW. (o całkowaniu granicy ciągu funkcyjnego)
zał: $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \to Y$, całkowalna
X - przedział $\subset \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$
$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny (do f)
teza: $\forall x_1, x_2 \in X \quad \int\limits_{x_1}^{x_2} (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{x_1}^{x_2} f_n(x)dx$

SZEREGI FUNKCYJNE

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in B(X,Y)$
$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg funkcyjny
$S_n \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \ (\Leftrightarrow \forall x \in X \quad S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))$

DEF. Szeregiem funkcyjnym nazywamy parę ciągów $((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}},\ (S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}),\ x \in X$
Ozn. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in X$

PRZ. $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1)$

DEF. Szereg funkcyjny $((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}, (S_n(x))_{n\in\mathbb{N}})$ jest **punktowo zbieżny** na X
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ istnieje taka funkcja $S : X \to Y$, że $S_n \overset{X}{\to} S$
S - suma szeregu funkcyjnego

DEF. Szereg funkcyjny $((f_n(x))_{n\in\mathbb{N}},(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}})$ jest **jednostajnie zbieżny** na X do S
$\overset{def}{\iff} S_n \overset{X}{\rightrightarrows} S$.

TW. (WK jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego)
Jeśli szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X (do $S(x)$), to $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest punktowo zbieżny na X (do $S(x)$).

TW. (WK punktowej zbieżności szeregu funkcyjnego)
zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest punktowo zbieżny na X
teza: $\forall x \in X \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (tzn. $(f_n \overset{X}{\to} 0 \equiv f)$)

TW. (WK jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego)
zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X
teza: $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} 0$.

PRZ. Czy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[0,1)$?

TW. (Weierstrassa)
zał: $f_n : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leqslant a_n$
$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ zbieżny
teza: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze X.

PRZ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{n}$
Czy jest jednostajnie zbieżny na $[0,1]$?

TW. zał: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$
$\forall n \in \mathbb{N}\ f_n : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$
f_n - różniczkowalna na X.
$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ zbieżny na X.
$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n'(x)$ jednostajnie zbieżny na X.
teza: $\forall x \in X \quad (\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x))' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

TW. zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$
$\forall n \in \mathbb{N}\ f_n : X \to \mathbb{R}$, X - przedział $\subset \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}\ f_n$ jest całkowalna na X.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny
teza: $\forall x_1, x_2 \in X \quad \int\limits_{x_1}^{x_2} (\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x))dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_1}^{x_2} f_n(x)dx$

TW. zał: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : X \to \mathbb{R},\ x \subset \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ jest ciągła na X.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X

teza: suma szeregu $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją ciągłą na X

SZEREGI POTĘGOWE

DEF. Szeregiem potęgowym o środku w punkcie x_0 nazywamy szereg funkcyjny postaci:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, gdzie:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R},\ x_0 \in \mathbb{R}$

(lub $a_n \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{C},\ x_0 \in \mathbb{C}$)

Spostrzeżenie. Szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny w x_0

Dowód. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$

TW. zał: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (*)

teza:

1) Jeśli szereg (*) jest zbieżny dla pewnego x_1, to jest zbieżny dla wszystkich x_1 takich, że $|x_2-x_0| < |x_1-x_0|$

2) Jeśli szereg (*) nie jest zbieżny dla x_1, to nie jest również zbieżny dla wszystkich x_2 takich, że $|x_2-x_0| > |x_1-x_0|$

DEF. $R = \sup\{|x-x_0|$: szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny$\}$

$R = 0 \Rightarrow$ szereg (*) jest zbieżny tylko w x_0

$R = +\infty \Rightarrow$ szereg (*) jest zbieżny $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{C}$)

$0 < R < +\infty$

Przedział (x_0-R, x_0+R) nazywamy **przedziałem zbieżności**.

Zbiór $\{x \in \mathbb{C} : |x-x_0| < R\}$ nazywamy kołem zbieżności.

Spostrzeżenie.

Szereg (*) jest zbieżny w (x_0-R, x_0+R) i nie jest zbieżny w $(-\infty, x_0-R) \cup (x_0+R, +\infty)$

Szereg (*) w punktach x_0-R i x_0+R może być zbieżny lub niezbieżny

TW. (Cauchy'ego - Hadamarda)

zał: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

$\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ (lub $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$)

teza:

$$R = \begin{cases} +\infty,\ \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda},\ 0 < \lambda < +\infty \\ 0,\ \lambda = +\infty \end{cases}$$

TW. (o zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$)

zał: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w (x_0-R, x_0+R) $(R>0)$

teza:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest bezwzględnie zbieżny w (x_0-R, x_0+R)

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest **niemal jednostajnie zbieżny** w (x_0-R, x_0+R)
(tzn. jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale domkniętym $[a,b] \subset (x_0-R, x_0+R)$)

TW. (o własnościach sumy szeregu potęgowego)

zał: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny w (x_0-R, x_0+R)

teza:

1) Suma szeregu $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest funkcją ciągłą w (x_0-R, x_0+R)

2) Suma szeregu $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest różniczkowalna $\forall x \in (x_0-R, x_0+R)$ i zachodzi wzór:
$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' \overset{tw}{=} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(x-x_0)^n]'$$

3) Suma szeregu $S(x)$ jest całkowalna w (x_0-R, x_0+R) i zachodzi wzór:
$\forall x_1, x_2 \in (x_0-R, x_0+R)$
$$\int_{x_1}^{x_2} S(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) dx \overset{tw}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} a_n(x-x_0)^n dx$$

PRZ. Wyznacz obszar zbieżności i sumę szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

TW. (Abela)

zał: szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny w (x_0-R, x_0+R) i w $x_1 = x_0 - R$ $(x_2 = x_0 + R)$

istnieje $\lim\limits_{x \to x_1^+} S(x)$ $(\lim\limits_{x \to x_2^-} S(x))$

teza: $S(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1^+} S(x)$ $(S(x_2) = \lim\limits_{x \to x_2^-} S(x))$

PRZ. Wyznacz obszar zbieżności i sumę szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n}}{4^n}$.

PRZ. Oblicz sumę szeregu liczbowego $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

SZEREGI TAYLORA

TW. (o wzorze Taylora) - przypomnienie

zał: U - otoczenie punktu x_0

$f \in C^n(U)$

$x \in U$

teza: $\exists c \in (x_0, x) : f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x_0, x)$, gdzie $R_n(x_0,x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$

TW. (o rozwijaniu funkcji w szereg Taylora)

zał: U - otoczenie punktu x_0

$f \in C^{\infty}(U)$

$x \in U$

$\forall x \in U \quad \lim\limits_{n\to\infty} R_n(x_0, x) = 0$

teza: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ - **szereg Taylora** funkcji f w punkcie x_0

Jeżeli $x_0 = 0$, to ten szereg nazywamy **szeregiem Maclaurina**.

PRZ. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$

$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$

DEF. $\sin z \stackrel{def}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $z \in \mathbb{C}$

$\cos z \stackrel{def}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, $z \in \mathbb{C}$

$e^z \stackrel{def}{=} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$

TW. (o wzorze Eulera)

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$

Wniosek: $z = \pi$

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$

$e^{i\pi} + 1 = 0$

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = e^{x^3}$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = e^{3x+1}$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Wzór na sumę szeregu geometrycznego: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$, $|q| < 1$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \dfrac{2x}{3-4x}$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

DEF. Uogólniony symbol Newtona

$\alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, & k > 0 \end{cases}$$

$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$ - wzór dwumianowy Newtona

$(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,\ x \in \mathbb{R}$

TW. (uogólniony wzór Newtona)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,\ x \in (-1,1)$$

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \sqrt{1+x}$.

SZEREGI FOURIERA

DEF. $L^2[a,b] := \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : \int\limits_{[a,b]} f^2(x)dx < +\infty \right\}$

$L^2[a,b]$ - zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem

Uwaga. Funkcje różniące się na zbiorze miary Riemanna równej zero będziemy utożsamiać.

Uwaga. $(L^2[a,b],\ +,\ \mathbb{R},\ *)$ jest przestrzenią wektorową.

TW. Odwzorowanie:

$$\circ \quad : \quad L^2[a,b] \times L^2[a,b] \ni (f,g) \to (f \circ g) = \int\limits_{[a,b]} f(x)g(x)dx, \quad f,g \in L^2[a,b]$$

jest iloczynem skalarnym w $L^2[a,b]$.

WN.
1. $(L^2[a,b], \circ)$ jest przestrzenią unitarną.
2. $(L^2[a,b], ||\cdot||)$ jest przestrzenią unormowaną, przy czym
$$||f|| = \sqrt{f \circ f} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$
3. $(L^2[a,b], d)$ jest przestrzenią metryczną, gdzie
$$d(f,g) = ||f-g|| = \sqrt{\int_a^b [f(x)-g(x)]^2 dx}$$

Uwaga. Zbieżność w sensie metryki d nazywa się **zbieżnością przeciętną z kwadratem**.

DEF. (ciągu ortogonalnego)

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$.

Niech $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2[a,b]$.

$\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi_n \neq 0$.

Ciąg $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **ortogonalnym** $\Leftrightarrow \forall i,j \in \mathbb{N},\ i \neq j \quad \varphi_i \circ \varphi_j = 0$.

Ciąg $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **ortonormalnym** $\Leftrightarrow \forall i,j \in \mathbb{N}, \quad \varphi_i \circ \varphi_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i=j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$ **- delta Kroneckera**

DEF. (szeregu ortogonalnego)

Niech $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem ortogonalnym i niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Wtedy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$ nazywamy **szeregiem ortogonalnym**.

TW. (współczynniki Eulera – Fouriera)

zał: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$ - szereg ortogonalny zbieżny jednostajnie do funkcji $f \in L^2[a,b]$

teza: $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \dfrac{f \circ \varphi_n}{||\varphi_n||^2}$ - współczynniki Eulera - Fouriera

DEF. $f \in L^2[a,b],\ (\varphi_n) \subset L^2[a,b],\ (\varphi_n)$ - ciąg ortogonalny

Szeregiem Fouriera względem (φ_n) funkcji f nazywamy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$, gdzie $c_n = \dfrac{f \circ \varphi_n}{||\varphi_n||^2}$.

Piszemy $f \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$

DEF. Mówimy, że f jest **rozwijalna w szereg Fouriera** względem ciągu ortogonalnego (φ_n)

$\Leftrightarrow \forall x \in [a,b] \quad f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$

(tzn. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$ jest zbieżny punktowo do f na $[a,b]$).

TW. (nierówność Bessela)

zał: $f \in L^2[a,b],\ (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg ortogonalny

$c_n = \dfrac{(f \circ \varphi_n)}{||\varphi_n||^2}$ dla $n = 0,1,2,\dots$

teza: $||f||^2 \geqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2||\varphi_n||^2$

TW. (tożsamość Parsevala)

zał: $f \in L^2[a,b]$,

$f \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$ (czyli $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$ jest szeregiem Fouriera funkcji f względem $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

teza:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$ - zbieżny przeciętnie z kwadratem do $f \Leftrightarrow ||f||^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2||\varphi_n||^2$.

DEF. (ciągu zupełnego)

Niech $L^2[a,b] \supset (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg ortogonalny

Ciąg $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **zupełnym** $\Leftrightarrow \forall f \in L^2[a,b] \quad ||f||^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2||\varphi_n||^2$

WN. zał: $f \in L^2[a,b],\ (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg zupełny

$f \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$ (czyli $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$ jest szeregiem Fouriera funkcji f względem $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$)

teza: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$ jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do f na $[a,b]$

SZEREGI TRYGONOMETRYCZNE FOURIERA

Niech $L^2[-\pi,\pi]$ będzie zbiorem funkcji całkowalnych z kwadratem na $[-\pi,\pi]$.
Dany jest ciąg funkcji (φ_n):
$1, \cos x, \sin x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

TW. 1. Ciąg (φ_n) jest ciągiem ortogonalnym.
2. Ciąg (φ_n) jest ciągiem zupełnym.

DEF. $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ całkowalna
Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji f na przedziale $[-\pi, \pi]$ nazywamy szereg postaci
$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
gdzie:
$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$
$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx,$
$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx,$

DEF. (warunki Dirichleta)

1) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f - ograniczona
2) f jest przedziałami monotoniczna w $[a,b]$ (tzn., że przedział $[a,b]$ da się podzielić na skończoną liczbę przedziałów, w których funkcja jest monotoniczna [stała, rosnąca lub malejąca])
3) funkcja f jest ciągła w $[a,b]$ poza skończoną liczbą punktów nieciągłości x_0, w których jednakże musi zachodzić
$$f(x_0) = \frac{\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x)}{2}$$
4) $f(a) = f(b) = \dfrac{\lim_{x \to a^+} f(x) + \lim_{x \to b^-} f(x)}{2}$

TW. Jeśli funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[-\pi, \pi]$, to szereg trygonometryczny Fouriera tej funkcji jest zbieżny punktowo do tej funkcji na $[-\pi, \pi]$ czyli
$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$
Mówimy wtedy, że f jest rozwijalna w szereg trygonometryczny Fouriera w $[-\pi, \pi]$.

Spostrzeżenie. Suma szereregu trygonometrycznego $S_f(x)$ funkcji $f(x)$ jest okresowa o okresie podstawowym $T = 2\pi$.

TW. (o rozwijaniu w szereg Fouriera funkcji nieparzystej)
zał: f jest nieparzysta na $[-\pi, \pi]$
f spełnia warunki Dirichleta na $[-\pi, \pi]$
teza: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,\ x \in [-\pi, \pi],$
gdzie $b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(x) \sin nxdx$

TW. (o rozwijaniu w szereg Fouriera funkcji parzystej)
zał: f jest parzysta i spełnia warunki Dirichleta w $[-\pi, \pi]$
teza: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\ x \in [-\pi, \pi],$

$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)dx,$

$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos nxdx.$

PRZ. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x$ w $(-\pi, \pi)$.

DEF. Niech f będzie określona na przedziale $(0, \pi)$.
Rozwinięciem w szereg sinusów funkcji f nazywamy szereg trygonometryczny Fouriera funkcji f* będącej rozszerzeniem funkcji f w taki sposób, aby f* była funkcją nieparzystą określoną na $[-\pi, \pi]$ (i spełniała warunki Dirichleta).
Wtedy $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,\ x \in (0, \pi),$
gdzie $b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\sin nxdx.$

DEF. Niech f będzie określona na przedziale $(0, \pi)$.
Rozwinięciem w szereg cosinusów funkcji f nazywamy szereg trygonometryczny Fouriera funkcji f* będącej rozszerzeniem funkcji f w taki sposób, aby f* była funkcją parzystą określoną na $[-\pi, \pi]$ (i spełniała warunki Dirichleta).
Wtedy $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,\ x \in (0, \pi),$
gdzie $a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)dx,$
$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x)\cos nxdx.$

Przypadek ogólny.
Niech $L^2[x_0 - l, x_0 + l]$ będzie zbiorem funkcji całkowalnych z kwadratem na $[x_0 - l, x_0 + l]$.
Dany jest ciąg funkcji (φ_n):
$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{2\pi x}{l}, \cos\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$

DEF. **Szeregiem trygonometrycznym Fouriera** funkcji f na przedziale $[x_0 - l, x_0 + l]$ nazywamy szereg postaci
$\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$
gdzie:
$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{x_0-l}^{x_0+l} f(x)dx,$
$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{x_0-l}^{x_0+l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$
$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{x_0-l}^{x_0+l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$

Uwaga. Pozostałe twierdzenia i definicje są analogiczne jak w przypadku $L^2[-\pi, \pi]$.

Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

$(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa
$(\mathbb{R}^k, ||\cdot||)$ przestrzeń wektorowa z normą euklidesową (która jest przestrzenią Banacha)
$(\mathbb{R}^k, d_e)$ przestrzeń wektorowa z metryką euklidesową

TW. Zał: ciąg $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^k$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^k$
Teza: $\lim_{n\to\infty} x_n = (g_1, g_2, \dots, g_k) \Leftrightarrow \forall i = 1, 2, \dots, k \quad \lim_{n\to\infty} x_n^i = g_i$

DEF. $D \subset \mathbb{R}^n$
$f : D \to \mathbb{R}^m$
$x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n),\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots,\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^m$
$f_i : D \to \mathbb{R}$ - funkcja składowa, $i = 1, 2, \dots, m$
f jest funkcją n zmiennych

PRZ. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$f(x, y, z) = (v_x(x, y, z),\ v_y(x, y, z),\ v_z(x, y, z))$

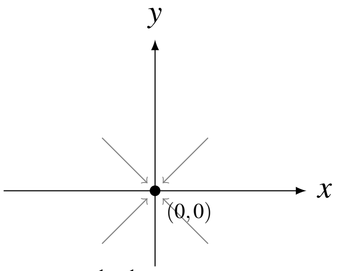
DEF. $D \subset \mathbb{R}^m, \quad S(x_0, r) \subset D$

Mówimy, że granicą funkcji f w punkcie x_0 jest $g \overset{def}{<=>}$ dla każdego ciągu $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ spełniającego warunki:

1. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D$
2. $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq x_0$
3. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$

PRZ. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
$f : D \to \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
$x_0 = (0, 0)$
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$



$x_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) =$
$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}\cdot 0}{\frac{1}{n^2} + 0^2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{0}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

${x_n}' = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} f({x_n}') = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ nie istnieje

PRZ. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ (x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow r\to 0 \\ \varphi - dowolne \end{array} \right| =$

$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\varphi \cdot r\sin\varphi}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cdot \underbrace{\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi}_{\text{ograniczona } \in[-1,1]} = 0$ (skorzystaliśmy z twierdzenia granicy iloczynu funkcji zbieżnej do 0 i funkcji ograniczonej)

PRZ. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4}$

(1) $\lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi-\text{dowolne}}} \frac{r^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^4\sin^4\varphi} =$

$= \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi-\text{dowolne}}} \frac{r\cos^2\varphi\sin\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} =???$

(2) $x_n = (\frac{1}{n}, 0)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\cdot 0}{\frac{1}{n^2}+0^2} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

$\underline{x_n{}' = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$

Z tego, że dla tych dwóch ciągów wyszła nam ta sama granica jeszcze nic nie wynika.

(3) $0 \leqslant |\frac{x^2y}{x^2+y^4}| \leqslant |\frac{x^2}{x^2+y^4}||y| \leqslant 1\cdot|y| \to 0.$

Zatem, z tw. o trzech funkcjach, wynika, że $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^4} = 0.$

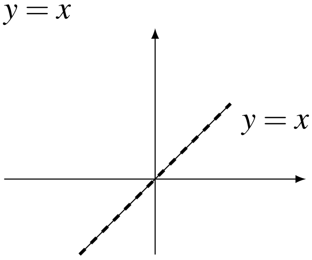
GRANICE ITEROWANE

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad f: D\to\mathbb{R}, \quad D\subset\mathbb{R}^2$

$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y)), \quad \lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))$ - granice iterowane

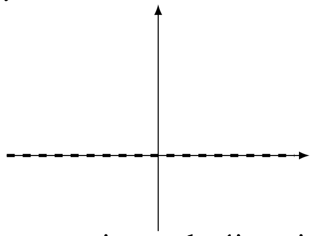
PRZ. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

- $y = x$



$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+0^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

- $y = 0$



$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot 0^2}{x^2\cdot 0 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$\Rightarrow$ granica podwójna nie istnieje.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot y^2}{x^2\cdot y^2 + (x-y)^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

Analogicznie, $\lim_{y\to 0}(0) = 0$.
$\Rightarrow$ obie granice iterowane istnieją i są jest równe 0.

Uwaga. Z istnienia (i równości) granic iterowanych NIE wynika, że istnieje granica podwójna.
Z tego, że granice iterowane nie istnieją (lub są różne) NIE wynika, że granica podwójna również nie istnieje.

DEF. $f : D \to \mathbb{R}^k, D \subset \mathbb{R}^n$
$x_0 \in U$, U - otoczenie punktu x_0, $U \subset D$
f jest ciągła w punkcie $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

TW. Zał: $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$
$f(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n), f_2(x_1,\dots,x_n),\dots, f_m(x_1,\dots,x_n))$
$x_0 = \left(x_0^1, x_0^2,\dots x_0^n\right) \in U \subset D$
$f_i : D \to \mathbb{R}$ $i = 1,\dots,m$
Teza: f jest ciągła w $x_0 \Leftrightarrow \forall i = 1,\dots,k$ f_i jest ciągła w x_0

PRZ. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ w punkcie $(0,0)$.

$D = \mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ r \to 0 \\ \varphi \text{ - dowolne} \end{array} \right| = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi \text{ dowolne}}} \frac{\cancel{r^2}\cos^2\varphi - \cancel{r^2}\sin^2\varphi}{\cancel{r^2}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} =$$

$$= \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi \text{ - dowolne}}} \underbrace{\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)}_{\text{nie istnieje}} \Rightarrow f \text{ nie jest ciągła w punkcie } (0,0)$$

TW. Zał: $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, gdzie X, Y, Z są przestrzeniami topologicznymi
f jest ciągła w x_0,
g jest ciągła w $y_0 = f(x_0)$
Teza: złożenie funkcji $g \circ f$ jest ciągłe w punkcie x_0

TW. Zał: $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$
f i g są ciągłe w $x_0 \in U \subset D$
Teza: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ (o ile $g(x) \neq 0$ w pewnym otoczeniu x_0) są ciągłe w punkcie x_0

PRZ. Sprawdź ciągłość w dziedzinie funkcji $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$x^2-y^2, \quad x^2+y^2$ - wielomiany dwóch zmiennych są ciągłe

$\overset{\text{tw}}{\Rightarrow} \quad \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ jest ciągła (jako iloraz funkcji ciągłych), o ile $x^2+y^2 \neq 0$

PRZ. Sprawdź ciągłość w dziedzinie funkcji $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$D = \mathbb{R}^2$

$\sin(x^2+y^2)$ jest ciągły jako złożenie funkcji ciągłych

i analogicznie jak w poprzednim przykładzie funkcja f jest ciągła w $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |t = x^2+y^2| = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow f$ jest ciągła w $(0,0)$

$\Rightarrow f$ jest ciągła w całym $\mathbb{R}^2$

DEF. (pochodna wzdłuż wektora)

$f:\ D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n$

$x_0 \in U \subset D$

$h \in \mathbb{R}^n, \quad h$ - wektor

Pochodną funkcji w punkcie x_0 wzdłuż wektora h nazywamy

$D_h f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t} \quad (\in \mathbb{R}^m).$

Inne oznaczenie: $\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(x_0)$

PRZ. $f(x,y) = x^2+y^2, \quad (x_0,y_0) = (1,0), \quad h = (2,1)$

$D_{(2,1)} f(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((1,0)+t(2,1))-f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+2t,t)-f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+2t)^2+t^2-1}{t} =$
$= \lim_{t\to 0} \frac{5t^2+4t}{t} = \lim_{t\to 0}(5t+4) = 4$

DEF. (pochodna w kierunku wektora)

$f: D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n$

$x_0 \in U \subset D$

$h \in \mathbb{R}^n$

Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora h nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 wzdłuż wersora wektora h tzn. wzdłuż $\frac{h}{\|h\|}$.

PRZ. Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = (xy, x+y)$ w punkcie $(1,-1)$ w kierunku wektora $h = (2,2)$.

$\frac{h}{\|h\|} = \frac{(2,2)}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{(2,2)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$D_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(1,-1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((1,-1)+t\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-f(1,-1)}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-f(1,-1)}{t} =$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right), 1+t\frac{\sqrt{2}}{2}-1+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(-1,0)}{t}$

$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}t^2-1,t\sqrt{2}\right)-(-1,0)}{t}$
$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\frac{1}{2}t^2,t\sqrt{2}\right)}{t} =$
$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{2}t, \sqrt{2}\right) = \left(0, \sqrt{2}\right)$

DEF. $f: D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n$
$x_0 \in U \subset D$
$x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n\right)$
Pochodną cząstkową funkcji f w punkcie x_0 względem zmiennej x_i (i-tej zmiennej) nazywamy
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f\left(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + \Delta x_i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n\right) - f\left(x_0^1, \dots, x_0^i, \dots, x_0^n\right)}{\Delta x_i}$

PRZ. $f(x,y) = x^2+y^2 \quad x_0 = (1,-1)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x,-1)-f(1,-1)}{\Delta x} =$
$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(1+\Delta x)^2+\cancel{(-1)^2}-(1)^2-\cancel{(-1)^2}}{\Delta x} =$
$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(\Delta x)^2+2\Delta x}{\Delta x} =$
$= \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+2) = 2$

PRZ. $f(x,y) = e^x \cos y, \quad D = \mathbb{R}^2, \quad (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = (e^x \cos y_0)'_x|_{x=x_0} = \cos y_0 e^x|_{x=x_0} = e^{x_0}\cos y_0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = (e^{x_0} \cos y)'_y|_{y=y_0} = e^{x_0}(-\sin y)|_{y=y_0} = -e^{x_0}\sin y_0$
$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y$

Spostrzeżenie. Zał: $f: D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in U \subset D$
w $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ dane są bazy kanoniczne, odpowiednio: $\{e_1,\dots,e_n\}$, $\{e'_1,\dots,e'_m\}$
Teza: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_{e_i}f(x_0)$

Dowód. $D_{e_i}f(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\left(x_0^1,x_0^2,\dots,x_0^n\right)+t(0,\dots,0,1,0,\dots,0)\right)-f\left(x_0^1,\dots,x_0^n\right)}{t} =$
$= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(x_0^1,x_0^2,\dots,x_0^i+t,\dots,x_0^n\right)-f\left(x_0^1,\dots,x_0^n\right)}{t} = |t = \Delta x_i| = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$

DEF. $f: D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n$
$x_0 \in U \subset D$
Mówimy, że f jest różniczkowalna w $x_0 \overset{def}{\iff}$ gdy istnieje takie odwzorowanie liniowe $L_{x_0}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, że:

$$\underset{x_0+h\in U}{\forall\, h \in \mathbb{R}^n} \quad f(x_0+h)-f(x_0) = L_{x_0}(h)+r_{x_0}(h),$$

gdzie $\lim_{h\to\vec{0}} \frac{r_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0\,(\in \mathbb{R}^m), \quad r_{x_0}(h)$ - reszta
oznaczenie: $L_{x_0} = df(x_0)$ - różniczka funkcji f w punkcie x_0
$L_{x_0}(h) = df(x_0)(h)$

PRZ. $f: (c,d) \to \mathbb{R} \quad L_{x_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad L_{x_0}(h) = a\cdot h$
$x_0 \in (c,d)$
$f(x_0+h)-f(x_0) = a\cdot h + r_{x_0}(h)$
$a = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - \frac{r_{x_0}(h)}{h}\right) = f'(x_0)+0 = f'(x_0).$

TW. (postać macierzowa różniczki funkcji)

Zał: $f : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)$

f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U \subset D$

$f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ f_2(x_1,\ldots,x_n),\ f_m(x_1,\ldots,x_n))$

Teza: różniczka funkcji w punkcie x_0 ma postać

$$df(x_0)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

DEF. Macierz $f'(x_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right]_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$ nazywamy **macierzą Jacobiego** funkcji f w punkcie x_0.

Jeśli $n = m$, to $J(x_0) = \det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right]_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}$ nazywamy **jakobianem** funkcji f w punkcie x_0.

PRZ. Czy funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$?

$f(x_0+h) - f(x_0) = L_{x_0}(h) + r_{x_0}(h)$

$f((0,0)+(h_1,h_2)) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 + r_{x_0}(h)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0-0}{\Delta x} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$f(h_1,h_2) - 0 = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + r_{(0,0)}(h_1,h_2)$

$r_{(0,0)}(h_1,h_2) = \frac{h_1 \cdot h_2^2}{h_1^2+h_2^2}$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r_{(0,0)}(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2^2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi\text{ - dowol.}}} \frac{r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r^3} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi\text{ - dowol.}}} \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi \quad \text{nie istnieje}$$

$\Rightarrow f$ nie jest różniczkowalna w $(0,0)$

TW. (o związku różniczki z pochodnymi wzdłuż wektora, WK różniczkowalności)

Zał: $f : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n$

$x_0 \in U \subset D$

f jest różniczkowalna w punkcie x_0 (i niech $df(x_0)$ oznacza różniczkę funkcji f w punkcie x_0)

Teza: istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0 wzdłuż dowolnego wektora $h \in \mathbb{R}^n$ i zachodzi $D_hf(x_0) = df(x_0)(h)$.

TW. (WK różniczkowalności związany z pochodnymi cząstkowymi)

Zał: $f : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$

f jest różniczkowalna w punkcie x_0 (i niech $df(x_0)$ oznacza różniczkę funkcji f w x_0)

Teza:

1. $\forall\, i = 1,\ldots,n$ istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w punkcie x_0

2. $\forall\, h = (h_1,\ldots,h_n) \in \mathbb{R}^n \quad df(x_0)(h_1,\ldots,h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i$

TW. (WK różniczkowalności związany z ciągłością)

Zał: $f : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in U \subset D$

f jest różniczkowalna w x_0

Teza: f jest ciągła w x_0

TW. (WW różniczkowalności)

Zał: $f : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in U \subset D$

$\forall\ i = 1, \ldots, n$ istnieją i są ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w punkcie x_0

Teza: f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i zachodzi:

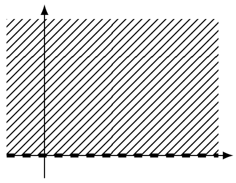
$\forall\ h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n \quad df(x_0)(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i$

PRZ. Czy funkcja $f(x,y) = x^2 + \ln y$ jest różniczkowalna w $(x_0, y_0) = (1,1)$? Jeśli tak, to podaj różniczkę tej funkcji w tym punkcie.

$D : x \in \mathbb{R}, \quad y > 0$

$D = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$

$(x_0, y_0) = (1,1)$



$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2 \cdot 1 = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{1}{1} = 1$ istnieją

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ jest ciągła w $(1,1)$, bo jest wielomianem

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$ jest ciągła w $(1,1)$ bo jest funkcją wymierną

z tw. poprzedniego wynika, że f jest różniczkowalna w $(1,1)$

$h \in \mathbb{R}^2 \quad df(1,1)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \cdot h_2 = 2h_1 + 1 \cdot h_2 = 2h_1 + h_2$

$df(1,1) : \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$df(1,1)(h_1, h_2) = 2h_1 + h_2$

$f'(1,1) = [2,1]$

TW. (interpretacja geometryczna różniczkowalności, WKW różniczkowalności)

zał: $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$

teza: f jest różniczkowalna w $(x_0, y_0) \in U \subset D \Leftrightarrow$ istnieje płaszczyzna (ściśle) styczna do powierzchni $z = f(x,y)$ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ o równaniu:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

PRZ. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad (x_0, y_0) = (1,1)$

$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad /^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ równanie sfery o środku w punkcie $(0,0,0)$, $R = 2$

$D_f : \quad 4 - x^2 - y^2 \geqslant 0$

$x^2 + y^2 \leqslant 4$

$(1,1) \in D_f, \quad (1,1) \in U \subset D_f$

Dlaczego jest różniczkowalna?

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{array}\right\}$$

są ciągłe w otoczeniu punktu $(1,1)$, bo iloraz dwóch funkcji ciągłych, z których jedna jest złożeniem pierwiastka i wielomianu

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{-1}{\sqrt{4-1^2-1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
z WW na różniczkowalność $\Rightarrow \quad f$ jest różniczkowalna w $(1,1)$
$f(x_0,y_0) = f(1,1) = \sqrt{4-1^2-1^2} = \sqrt{2}$
$z - \sqrt{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{-1}{\sqrt{2}}(y-1)$

Uwaga. Zał: $f: \quad D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$
f jest różniczkowalna w $x_0 \in U \subset D$
$x_0 + h \in U$
Teza: $f(x_0+h) \cong f(x_0) + df(x_0)(h)$

PRZ. Oblicz przybliżoną wartość $\sqrt{(0,98)^3 + (2,05)^3}$
$f(x,y) = \sqrt{x^3+y^3}$
$(x,y) = (0,98;2,05)$
$(x_0,y_0) = (1,2)$
$h = (x-x_0, y-y_0) = (-0,02;0,05)$
$$df(x_0,y_0)(h_1,h_2) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2}$$
$f((x_0,y_0)+(h_1,h_2)) \cong f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^3+y^3}}\left(3x^2\right) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{3\cdot 1^2}{2\sqrt{1+8}} = \frac{1}{2}$
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^3+y^3}}\left(3y^2\right) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{3\cdot 2^2}{2\sqrt{1+8}} = 2$
$f(0,98;2,05) \cong \sqrt{1^3+2^3} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\left(-\frac{\cancel{2}}{100}\right) + 2\cdot\frac{5}{100} = 3 + \frac{9}{100} = 3,09$

DEF. $f: D \to \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^n$
niech $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ będzie określona w pewnym otoczeniu $U \subset D$ punktu x_0
Pochodną cząstkową 2-go rzędu nazywamy
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0,\dots,x_{j-1}^0,x_j^0+\Delta x_j,x_{j+1}^0,\dots,x_n^0) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0,\dots,x_n^0)}{\Delta x_j}$$
Inaczej $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

PRZ. $f(x_1,x_2) = x_1^2 - \sin x_2$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\cos x_2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1) = 2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1) = 0$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}(-\cos x_2) = 0$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}(-\cos x_2) = \sin x_2$

DEF. Załóżmy, że w pewnym otoczeniu U funkcja f jest różniczkowalna tzn. $\forall x \in U \quad \exists df(x)$
czyli istnieje funkcja: $\quad U \ni x \to df(x)$
Funkcję f nazywamy 2-krotnie różniczkowalną w punkcie $x_0 \in U \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ gdy funkcja
$U \ni x \to df(x)$ jest różniczkowalna w x_0
$d^2 f(x_0) = d(df)|_{x=x_0}$

PRZ. $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$

$df(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2$

$d^2 f(h_1, h_2) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2\right) h_1 + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2\right) h_2 =$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_2^2$

$\uparrow$

różniczka zupełna rzędu 2–go funkcji f w punkcie x_0

PRZ. $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^3$

$$df(h_1, h_2, h_3) = \overbrace{\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 + \frac{\partial f}{\partial z} h_3}^{(*)}$$

$d^2 f(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial}{\partial x}(*) h_1 + \frac{\partial}{\partial y}(*) h_2 + \frac{\partial}{\partial z}(*) h_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} h_3 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} h_1 h_2 +$

$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} h_3 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} h_3 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} h_2 h_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} h_3^2$

TW. (WW na 2-krotną różniczkowalność)

Zał: istnieją i są ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe 2-go rzędu funkcji f w punkcie $x_0 \in U \subset D_f$

Teza: f jest 2-krotnie różniczkowalna w x_0

TW. (Schwarza o równości pochodnych mieszanych)

zał: f jest 2-krotnie różniczkowalna w x_0

teza: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0)$

PRZ. cd. $d^2 f(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_1^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_2^2$

PRZ. cd. $d^2 f(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} h_3^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} h_2 h_3 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} h_1 h_3$

Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych

DEF. $f : D \to \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad D$ - obszar

Mówimy, że f ma maksimum (minimum) lokalne w punkcie $x_0 \in D \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ istnieje takie otoczenie $U \subset D$ punktu x_0, że: $\underset{x \neq x_0}{\forall\, x \in U}\ f(x) \underset{(>)}{<} f(x_0)$

PRZ. $f(x, y) = x^2 + y^2$

$z = x^2 + y^2$ równanie paraboloidy

f ma w $(0, 0)$ minimum lokalne o wartości 0

TW. (WK istnienia ekstremum lokalnego)

Zał: $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

f jest różniczkowalna w $x_0 \in D$ (D - obszar)

f ma ekstremum lokalne w x_0

Teza: $df(x_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{odwzorowanie liniowe zerowe}}}{0}$ $(\Leftrightarrow \forall\, h \in \mathbb{R}^n\ df(x_0)(h) = 0)$

$\left(\Rightarrow \forall\, i = 1, \ldots, n \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0\right)$

PRZ. $f(x,y)=x^2+y^2, \quad D=\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=2x\\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y\end{array}\right\}$$ pochodne ciągłe jako wielomiany

($\Rightarrow f$ różniczkowalna w $\mathbb{R}^2$)

$\begin{cases}2x=0\\ 2y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow$ jedynym punktem, w którym funkcja f może mieć ekstremum (zwanym punktem stacjonarnym) jest punkt $(0,0)$

DEF. Formą kwadratową nazywamy funkcję $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ taką, że:

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\ldots+a_{1n}x_1x_n+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\ldots+$$
$$+a_{2n}x_2x_n+\ldots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\ldots+a_{nn}x_n^2=$$
$$=\begin{bmatrix}x_1, & \ldots, & x_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=X^T\cdot A\cdot X$$

gdzie macierz A jest macierzą symetryczną i nazywamy ją macierzą formy kwadratowej.

DEF. Mówimy, że forma kwadratowa φ jest

(1) **dodatnio** określona $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall_{\substack{h\in\mathbb{R}^n\\ h\neq 0}} \quad \varphi(h)>0$

(2) **ujemnie** określona $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall_{\substack{h\in\mathbb{R}^n\\ h\neq 0}} \quad \varphi(h)<0$

(3) **nieujemnie** określona $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, h\in\mathbb{R}^n \quad \varphi(h)\geqslant 0$

(4) **niedodatnio** określona $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, h\in\mathbb{R}^n \quad \varphi(h)\leqslant 0$

(5) **nieokreślona** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, h_1\in\mathbb{R}^n \quad \varphi(h_1)<0 \wedge \exists\, h_2\in\mathbb{R}^n \quad \varphi(h_2)>0$

TW. (Sylvestra)

Zał: $A=\left[a_{ij}\right]_{j=1\ldots n}^{i=1\ldots n}$ - macierz formy kwadratowej φ

$$d_k=\det\begin{bmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{k1} & \ldots & a_{kk}\end{bmatrix} \qquad k=1,\ldots,n$$

Teza:

1) $\forall\, k=1,\ldots,n \quad d_k>0 \Rightarrow \varphi$ jest dodatnio określona $\quad (+,+,+,\ldots)$

2) $\forall\, k=1,\ldots,n \quad (-1)^k d_k>0 \Rightarrow \varphi$ jest ujemnie określona $(-,+,-,+,\ldots)$

3) $\forall\, k=1,\ldots,n \quad d_k\geqslant 0 \Rightarrow \varphi$ jest nieujemnie określona

4) $\forall\, k=1,\ldots,n \quad (-1)^k d_k\geqslant 0 \Rightarrow \varphi$ jest niedodatnio określona

5) jeśli nie zachodzi ani 3), ani 4), to φ jest nieokreślona

DEF. $f:D\to\mathbb{R} \quad D\subset\mathbb{R}^n$

f jest dwukrotnie różniczkowalna w x_0

Macierzą formy kwadratowej związaną z drugą pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy

$$M(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$

- macierz Hessego

TW. (WW na istnienie ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych)
Zał: $f : D \to \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad D$ - obszar, $\quad x_0 \in U \subset D$
f jest $C^2(U)$ (tzn. że wszystkie pochodne cząstkowe 2–go rzędu są ciągłe w U)
f spełnia WK na istnienie ekstremum lokalnego w x_0 $\left(\text{tzn. } \forall\, i = 1,\dots,n \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0\right)$
Teza: [d_k odnosi się do macierzy formy kwadratowej związanej z 2-gą pochodną funkcji f czyli $M(x_0)$]

1) $\forall\, k = 1,\dots,n \quad d_k > 0 \Rightarrow f$ ma minimum lokalne w punkcie x_0 (+,+,+,...),

2) $\forall\, k = 1,\dots,n \quad (-1)^k d_k > 0 \Rightarrow f$ ma maksimum lokalne w punkcie x_0 (-,+,-,...),

3) jeśli forma kwadratowa jest nieokreślona w punkcie x_0, to f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie x_0

PRZ. $f(x,y) = x^2 + y^2$
$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$
$M(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
$M(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d_1 = \det[2] = 2 > 0 \\ d_2 = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 4 > 0 \end{array}$
$\Rightarrow f$ ma minimum lokalne w punkcie $(0,0)$

PRZ. $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2 = x^3 + y^3 - (x+y)^2$
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x - 2y$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2y - 2x$
$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 2y = 0 \\ 3y^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$
$3x^2 - 3y^2 = 0$
$(x-y)(x+y) = 0$

I. $x = y$
$3x^2 - 2x - 2x = 0$
$x(3x-4) = 0$
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$

II. $x = -y$
$3x^2 - 2x + 2x = 0$
$x^2 = 0$
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 2x - 2y) = 6x - 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 2$
$M(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-2 & -2 \\ -2 & 6y-2 \end{bmatrix}$
$M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d_1 = 6 > 0 \\ d_2 = 36 - 4 = 32 > 0 \end{array}$
$\Rightarrow f$ ma minimum lokalne w punkcie $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$
$M(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} d_1 = -2 \leqslant 0 \\ d_2 = 0 \geqslant 0 \end{array}$

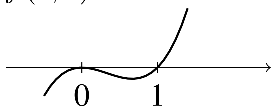
Z tego nie można wnioskować ani o istnieniu, ani o nieistnieniu ekstremum lokalnego w $(0,0)$.

Forma kwadratowa, która jest stowarzyszona z macierzą $M(0,0)$ jest niedodatnio określona więc funkcja f może mieć maksimum lokalne w punkcie $(0,0)$.

Ćw. dom. Uzasadnić, z definicji (ekstremum lokalnego), że f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie $(0,0)$ pokazując, że dowolnym sąsiedztwie punktu $(0,0)$ są punkty, w których funkcja f przyjmuje wartości > 0 i < 0.

PRZ. CD. $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$
$f(x,y) = x^3 + y^3 - (x+y)^2$
$f(0,0) = 0$
Pokazać, że w sąsiedztwie $(0,0)$ są punkty, w których funkcja f przyjmuje wartości > 0 i < 0.

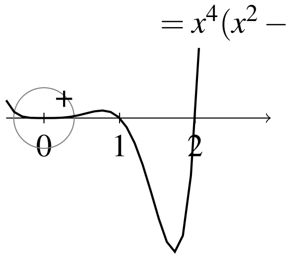
$y = 0$
$f(x,0) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$



$y = x$
$x^3 + x^3 - (2x)^2 = 2x^3 - 4x^2 = 2x^2(x-1)$
z tego nic nie wynika

$y = x^2 - x$

$$\begin{aligned} f(x,x^2-x) &= x^3 + (x^2-x)^3 - (x+x^2-x)^2 = x^3 + [x(x-1)]^3 - (x^2)^2 = x^3(x-1)^3 - x^4 = \\ &= x^3 + x^3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - x^4 = \cancel{x^3} + x^6 - 3x^5 + 3x^4 - \cancel{x^3} - x^4 = x^6 - 3x^5 + 2x^4 = \\ &= x^4(x^2 - 3x + 2) = x^4(x-2)(x-1) \end{aligned}$$



Nie ma ekstremum lokalnego w $(0,0)$

EKSTREMA WARUNKOWE

PRZ. $f(x,y) = x + y$
$x^2 + y^2 = 1$
Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x + y$ na zbiorze D (punktów spełniających warunek $x^2 + y^2 = 1$).
Zbiór D nie jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^2$ więc nie da się tutaj zastosować podanych wcześniej definicji i twierdzeń dotyczących ekstremów lokalnych.

DEF. $f: \ D \to \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n$
warunek: $g: \ D' \to \mathbb{R} \quad D' \subset \mathbb{R}^n$
Zakładamy, że f jest klasy C^2 na D
oraz g jest klasy C^1 na D'
$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{g(x) = 0}_{\text{warunek}}\} \begin{array}{l} \subset D \\ \subset D' \end{array}$
Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f: \ S \to \mathbb{R}$ zwane ekstremami warunkowymi.

DEF. Mówimy, że funkcja f osiąga $\underset{\text{minimum}}{\textbf{maksimum}}$ **lokalne warunkowe** w punkcie $x_0 \in S \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists\, U \subset D: \ \forall_{x \neq x_0}\, x \in U \cap S \quad f(x) \underset{(>)}{<} f(x_0)$

Metoda Lagrange'a
Tworzymy funkcję Lagrange'a
$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda g(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

TW. (WK istnienia ekstremum warunkowego)
zał: $f,\ g$ są klasy C^1 na odpowiednich zbiorach D, D'
f ma ekstremum warunkowe w punkcie $x_0 \in S$
teza: $\begin{cases} \exists\ \lambda_0 \in \mathbb{R}:\ \forall\ i = 1,\dots,n\ \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_0,\lambda_0) = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$

DEF. Hesjan obrzeżony

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(x_0,\lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0,\lambda_0) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0,\lambda_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0,\lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(x_0,\lambda_0) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0,\lambda_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0,\lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0,\lambda_0) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(x_0,\lambda_0) \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$\vdots$
$H_k = \dots$
$\vdots$
$H_n = \dots$

TW. (WW na istnienie ekstremum warunkowego)
zał: $f \in C^2(D)$ oraz $g \in C^2(D')$
spełniony jest WK istnienia ekstremum warunkowego w punkcie (x_0,λ_0), $x_0 \in S$.
teza:

1) $\forall\ k = 2,\dots,n \quad H_k < 0 \Rightarrow f$ ma minimum lokalne warunkowe w punkcie x_0. (-,-,-,-,...)

2) $\forall\ k = 2,\dots,n \quad (-1)^{k+1}H_k < 0 \Rightarrow f$ ma maksimum lokalne warunkowe w punkcie x_0. (+,-,+,-,...)

3) Jeśli nie zachodzi ani ($\forall\ k = 2,\dots,n \quad H_k \leqslant 0$), ani ($\forall\ k = 2,\dots,n \quad (-1)^{k+1}H_k \leqslant 0$), to f nie ma ekstremum lokalnego warunkowego w punkcie x_0.

PRZ. $f(x,y) = x + y$
$x^2 + y^2 = 1$
$g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$
$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x \qquad \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \end{cases}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2-1=0$$
$$2\cdot\frac{1}{4\lambda^2}=1$$
$$\lambda^2=\frac{1}{2}$$

$$\lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \lambda_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \lambda_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \lambda_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=2\lambda \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=0$$
$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=2\lambda \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=0$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y}=2y$$
$$(x_2,y_2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \lambda=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$H=\begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$
$$H_2=\det H=2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=4\sqrt{2}>0$$
$\Rightarrow f$ ma maksimum lokalne warunkowe w $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

PRZ. Wyznaczyć wartość największą i najmniejszą osiąganą przez funkcję $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ na zbiorze $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2+z^2\leqslant 100\}$.

I badamy wnętrze zbioru V

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x \qquad \begin{cases} 2x=0 \\ 4y=0 \\ 6z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=4y$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=6z$$
$$f(0,0,0)=0$$

II $x^2+y^2+z^2=100$

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+2y^2+3z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-100)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda x \qquad \begin{cases} 2x+2\lambda x=0 \\ 4y+2\lambda y=0 \\ 6z+2\lambda z=0 \end{cases}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=4y+2\lambda y$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}=6z+2\lambda z \qquad \begin{cases} x(2+2\lambda)=0 \\ y(4+2\lambda)=0 \\ z(6+2\lambda)=0 \\ x^2+y^2+z^2=100 \end{cases}$$

1. $x=0$

<u>1.1</u> $y=0$

$$0^2+0^2+z^2=100$$
$$z=10 \quad \text{lub} \quad z=-10$$
$$\lambda=-3$$
$$f(0,0,10)=300$$
$$f(0,0,-10)=300$$

1.2 $2+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$
$z(3-2)=0$
$z=0$
$0^2+y^2+0^2=100$
$y=10 \quad \vee \quad y=-10$
$f(0,10,0)=200$
$f(0,-10,0)=-200$

2. $1+\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$
$y(2-1)=0 \Rightarrow y=0$
$z(3-1)=0 \Rightarrow z=0$
$x^2+0^2+0^2=100$
$x=10 \quad \vee \quad x=-10$
$f(10,0,0)=100 \qquad f(0,10,0)=200$
$f(-10,0,0)=100 \qquad f(0,-10,0)=200$

Odp. Największa wartość to 300 a najmniejsza to 0.

FUNKCJE UWIKŁANE

PRZ. $x^2+y^2=1$
$(x_0,y_0)=(0,1)$
$y=\sqrt{1-x^2}$

PRZ. $x^2y-xy^2=0$
$xy(x-y)=0$

PRZ. $xe^y-ye^x-e^{xy}=0$

DEF. $F:\ D\to\mathbb{R} \quad D\subseteq\mathbb{R}^2$
$F(x,y)=0$
$(x_0,y_0)\in D:\ F(x_0,y_0)=0$
Jeżeli w otoczeniu punktu (x_0,y_0) istnieje funkcja $y:\ V\to W$ $(U\subset D\subset\mathbb{R})$
$y=y(x)$ taka, że $\forall\, x\in V\ F(x,y(x))=0$, to mówimy, że równanie $F(x,y)=0$ można rozwikłać w otoczeniu punktu (x_0,y_0).
Funkcję $y=y(x)$ nazywamy **funkcją uwikłaną** daną równaniem $F(x,y)=0$.

TW. (WW na istnienie funkcji uwikłanej)
Zał: $F:\ D\to\mathbb{R} \quad D\subseteq\mathbb{R}^2$
$F(x,y)=0$
$F(x_0,y_0)=0$
U - otoczenie punktu (x_0,y_0)
$F\in C^1(U)$
$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$
Teza: 1) istnieje takie otoczenie V punktu x_0 i takie otoczenie W punktu y_0 oraz istnieje taka funkcja $y:\ V\to W$, że $\forall\, x\in V\ F(x,y(x))=0$,
(czyli istnieje funkcja uwikłana $y=y(x)$ dana równaniem $F(x,y)=0$ w otoczeniu punktu (x_0,y_0)).

2) Ponadto
$$y'(x_0)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

PRZ. $xe^y - ye^x - e^{xy} = 0$

$(x_0, y_0) = (1,0)$

$F(x,y) = xe^y - ye^x - e^{xy}$

$F(1,0) = 0$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= e^y - ye^x - e^{xy}\cdot y \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= xe^y - e^x - e^{xy}\cdot x \end{aligned}\right\} \underset{\substack{\Downarrow \\ F\in C^1(\mathbb{R}^2)}}{\text{funkcje ciągłe w } \mathbb{R}^2}$$

$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 1\cdot e^0 - e^1 - e^0 = -e \neq 0$

$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)} = -\frac{e^0-0-0}{-e} = \frac{1}{e}$

II sposób

$xe^y - ye^x - e^{xy} = 0$

$y = y(x)$

$F(x,y(x)) = 0 \quad \forall\, x\in V$

$xe^{y(x)} - y(x)e^x - e^{xy(x)} = 0 \quad \forall\, x\in V \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial x}$

$e^{y(x)} + xe^{y(x)}y'(x) - (y'(x)e^x + y(x)e^x) - (e^{xy(x)}(y(x)+xy'(x))) = 0$

$y'(x)\ (xe^{y(x)} - 1 - e^{xy(x)}\cdot x) = -e^{y(x)} + y(x)e^x + e^{xy(x)}\cdot y(x)$

$$y'(x) = \frac{-e^{y(x)} + y(x)e^x + e^{xy(x)}y(x)}{xe^{y(x)} - e^x - xe^{xy(x)}}$$

TW. (wzór na $y''(x_0)$ jeśli $y'(x_0) = 0$)

Zał: $F(x,y) = 0$

$F:\ D\to\mathbb{R} \quad D\subset\mathbb{R}^2 \quad F(x_0,y_0) = 0$

$F\in C^2(U) \quad U$ - otoczenie punktu (x_0,y_0)

$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$

$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \quad (y'(x_0) = 0 \Leftarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0) = 0)$

Teza: $y''(x_0) = -\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$

PRZ. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej postaci $y = y(x)$ zadanej równaniem

$x^3 + y^3 - 6xy = 0 \quad (*)$

$F(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 6y$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 6x$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow\ 3x^2 - 6y = 0$

$y = \frac{1}{2}x^2$

$y = \frac{1}{2}x^2$ wstawiamy do równania $(*)$

$x^3 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 - 6x\frac{1}{2}x^2 = 0$

$x^3 + \frac{1}{8}x^6 - 3x^3 = 0$

$\frac{1}{8}x^6 - 2x^3 = 0$

$x^3(x^3 - 16) = 0$

$x^3 = 0 \quad \vee \quad x^3 = 16$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2} \\ y = \frac{1}{2}(2\sqrt[3]{2})^2 = 2\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

$x = 0,\ y = 0$

$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0 \to$ nie wiemy, czy istnieje funkcja rozwikłująca

$x = 2\sqrt[3]{2},\ y = 2\sqrt[3]{4}$
$\frac{\partial F}{\partial y}(2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4}) = 3 \cdot (2\sqrt[3]{4})^2 - 6 \cdot 2\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{16} - 12\sqrt[3]{2} = 12(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) \neq 0$

$$y''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 6y)$

$$y''(x_0) = y''(2\sqrt[3]{2}) = -\frac{6 \cdot 2\sqrt[3]{2}^{\,>0}}{\underbrace{12(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2})}_{>0}} < 0$$

$\Rightarrow y = y(x)$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0 = 2\sqrt[3]{2}$ o wartości $y_0 = 2\sqrt[3]{4}$

TW. (przypomnienie o postaci macierzowej różniczki funkcji)
Zał: $f : D \to \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 = \left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)$
f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U \subset D$
$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n),\ f_2(x_1, \ldots, x_n),\ f_m(x_1, \ldots, x_n))$
Teza: różniczka funkcji w punkcie x_0 ma postać

$$df(x_0)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

DEF. Macierz $f'(x_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right]_{j=1\ldots n}^{i=1\ldots m}$ nazywamy **macierzą Jacobiego** funkcji f w punkcie x_0.

Jeśli $n = m$, to $J(x_0) = \det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right]_{j=1\ldots n}^{i=1\ldots m}$ nazywamy **jakobianem** funkcji f w punkcie x_0.

PRZ. $f : (r, \varphi) \to (\overset{x}{r\cos\varphi}, \overset{y}{r\sin\varphi})$
$D = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$
$(r_0, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$

$$f'(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$J(r, \varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$

TW. (o różniczkowalności funkcji złożonej)
Zał: $f : D \to \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^n$
$g : E \to \mathbb{R}^m, \quad E \subset \mathbb{R}^k$
$h = g \circ f : \quad D \to \mathbb{R}^m$
f jest różniczkowalna w $x_0 \in U \subset D$
g jest różniczkowalna w $f(x_0) = y_0 \in V \subset E$
Teza: funkcja złożona $g \circ f$ jest różniczkowalna w x_0 i $d(g \circ f)(x_0) = \ dg(y_0) \underset{\uparrow}{\circ} df(x_0)$

(złożenie odwzorowań liniowych)

TW. (wersja macierzowa tw. o różniczkowalności funkcji złożonej)
Zał: jak w tw. poprzednim
$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n))$
$g(y_1, \ldots, y_k) = (g_1(y_1, \ldots, y_k), \ldots, g_m(y_1, \ldots, y_k))$

$h(x_1,\ldots,x_n) = (g\circ f)(x_1,\ldots,x_n) = (h_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,h_m(x_1,\ldots,x_n))$

Teza: $\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial h_m}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(y_0) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k}(y_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(y_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(y_0) & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial y_k}(y_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(y_0) & \frac{\partial g_m}{\partial y_2}(y_0) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial y_k}(y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix}$$

PRZ. $f(x_1,x_2) = (x_1-x_2, x_1+x_2)$ $\qquad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$g(y_1,y_2) = y_1y_2$ $\qquad g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$h = g\circ f$

I sp.

$h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$h(x_1,x_2) = (g\circ f)(x_1,x_2) = g(f(x_1,x_2)) = g(x_1-x_2,x_1+x_2) = (x_1-x_2)(x_1+x_2) = x_1^2-x_2^2$

$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}$

II sp.

$h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & \frac{\partial g}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 & y_1 \end{bmatrix}$

$h' = \begin{bmatrix} y_2 & y_1 \end{bmatrix}\Big|_{\substack{y_1=x_1-x_2\\ y_2=x_1+x_2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1+y_2, & -y_2+y_1 \end{bmatrix}\Big|_{\substack{y_1=x_1-x_2\\ y_2=x_1+x_2}} =$

$= \begin{bmatrix} 2x_1, & -(x_1+x_2)+x_1-x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1, & -2x_2 \end{bmatrix}$

PRZ. Rozwiązać równanie różniczkowe cząstkowe $z'_x = z'_y$, gdzie $z = z(x,y)$, przyjmując nowe zmienne

$u = x+y \quad v = x-y.$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (*)$

$z = z(x,y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \quad \forall (x,y)\in D$

$z:(x,y)\to z(x,y)\in\mathbb{R}$

$f:(x,y)\to(u(x,y),v(x,y))\in\mathbb{R}^2$

$g:(u,v)\to g(u,v)$

$z = g\circ f$

$z' = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x}, & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}$

$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot 1$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot(-1)$

wstawiamy do równania $(*)$
$\cancel{\frac{\partial g}{\partial u}} + \frac{\partial g}{\partial v} = \cancel{\frac{\partial g}{\partial u}} - \frac{\partial y}{\partial v}$
$2 \cdot \frac{\partial g}{\partial v} = 0$
$\frac{\partial g}{\partial v} = 0$
$g(u,v) = \varphi(u)$, gdzie φ jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej
$z(x,y) = (g \circ f)(x,y) = g(x+y, x-y) = \varphi(x+y)$
$z = \varphi(x+y)$.

CAŁKA PODWÓJNA PO PROSTOKĄCIE
P - prostokąt $\subset \mathbb{R}^2$
$f: P \to \mathbb{R}$
Tworzymy podział π_n prostokąta P na n małych prostokątów $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
δn - średnica podziału - długość najdłuższej przekątnej prostokątów $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
Tworzymy ciąg podziałów:
$\pi_1 : P_1$
$\pi_2 : P_1, P_2$
$\vdots$
$\pi_n : P_1, P_2, \ldots, P_n$
Mówimy, że ciąg podziałów $(\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest normalny $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$.
$\forall\ i = 1 \ldots n$ wybieramy punkt pośredni $(c_i, d_i) \in P_i$
Tworzymy sumę całkową $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i, d_i) \cdot \underbrace{|P_i|}_{\text{pole prostokąta } P_i}$

DEF. Jeśli dla dowolnego normalnego ciągu podziałów prostokąta P istnieje granica właściwa ciągu sum całkowych S_n i granica ta nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów, ani od wyboru punktów pośrednich, to granicę tę nazywamy **całką podwójną funkcji f po prostokącie** P i oznaczamy symbolem
$$\iint\limits_P f(x,y)dxdy (= \lim_{n\to\infty} S_n)$$
Mówimy wtedy, że f jest całkowalna po prostokącie P.

TW. (WW na całkowalność funkcji po prostokącie)
Jeżeli f jest ciągła na prostokącie P, to f jest całkowalna po prostokącie P

TW. (Fubiniego)
zał: $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$
$f: P \to \mathbb{R}$ całkowalna na prostokącie P
teza:

1) $[a_1, b_1] \ni x \to \varphi(x) = \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$

Funkcja $\varphi(x)$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[a_1, b_1]$

2) $\iint\limits_P f(x,y)dxdy = \int\limits_{a_1}^{b_1} \left[\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy \right] dx \left(= \int\limits_{a_1}^{b_1} \varphi(x)dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy \right)$

CAŁKA PODWÓJNA PO OBSZARZE OGRANICZONYM
$D \subset \mathbb{R}^2$ $\exists P$ - prostokąt $D \subset P$
$\uparrow$ograniczony

DEF. Funkcją charakterystyczną zbioru D nazywamy funkcję

$$\chi_D(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

Uwaga. $f:\ P\to\mathbb{R}$

$$(f\cdot\chi_D)(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}$$

DEF. Całką podwójną funkcji f po zbiorze ograniczonym D nazywamy

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy\overset{\text{def}}{=}\iint\limits_P (f\chi_D)(x,y)dxdy$$

DEF. Obszarem normalnym względem osi OX nazywamy obszar $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[a,b],$ $\varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\}$,
gdzie $\varphi,\ \psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ są ciągłe

PRZ. $K((0,0),R)$ jest obszarem normalnym względem osi OX.

Uwaga. Analogicznie definiujemy obszar normalny względem osi OY

PRZ. Obszar normalny względem osi OX, ale nie względem osi OY

TW. (o zamianie całki podwójnej na całkę iterowaną dla obszaru normalnego względem osi OX)

Zał: $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[a,b],\ \varphi(x)\leqslant y\leqslant\psi(x)\},\varphi,\ \psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ ciągłe
$f:\ D\to\mathbb{R}$ ciągła

Teza: $$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\right)dx\left(=\int_a^b dx\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)}f(x,y)dy\right)$$

PRZ. $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy,$ gdzie $D:\begin{cases}y=\sqrt{x}\\ x=0\\ y=1\end{cases}$

I podejście

$D=\{(x,y):\ x\in[0,1],\ \underset{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\leqslant y\leqslant\underset{\psi(x)}{1}\}$

$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1 dx\int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}}dy=?$$

$$\int e^{\frac{x}{y}}dy=\left|\begin{array}{l}t=\frac{x}{y}\\ dt=-\frac{x}{y^2}dy\end{array}\right|=\int -x\frac{e^t}{t^2}dt$$

II podejście

$D=\{(x,y):\ y\in[0,1]\ \underset{\varphi(y)}{0}\leqslant x\leqslant\underset{\psi(y)}{y^2}\}$

$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^{y^2}e^{\frac{x}{y}}dx=\int_0^1 dy\left[ye^{\frac{x}{y}}\right]_0^{y^2}=\int_0^1 dy(ye^y-y)=\dots$$

TW. I

zał: $f, g: D \to \mathbb{R}$ całkowalne

D - obszar normalny względem jednej z osi

teza: $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \iint\limits_D (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x,y)dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g(x,y)dxdy$

TW. II

zał: $D_1,\ D_2$ - obszary normalne względem jednej z osi

$int\ D_1\ \cap\ int\ D_2 = \varnothing$

$f:\ D_1\ \cup\ D_2 \to \mathbb{R}$ całkowalna

teza: $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

DEF. Obszar D nazywamy **obszarem regularnym** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

1) $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$

2) $\forall\ i = 1, \ldots, n \quad D_i$ - obszar normalny względem jednej z osi

3) $\forall\ i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad i \neq j \Rightarrow int\ D_i\ \cap\ int\ D_j = \varnothing$

TW. Jeśli $f:\ D \to \mathbb{R}$ ciągła i D - obszar regularny, to f jest całkowalna na D i zachodzi wzór:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy$$

TW. (o zamianie zmiennych w całce podwójnej)

zał: $f:\ D \to \mathbb{R}$ ciągła

D - regularny

$\Phi:\ D' \to D$

Φ przeprowadza $int\ D'$ na $int\ D$

$D' \ni (u,v) \to \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v)) \in D$

$\Phi'(u,v)$ - macierz Jacobiego funkcji Φ

$J(u,v) = \det \Phi'(u,v)$ - jakobian

$\forall\ (u,v) \in int\ D' \quad J(u,v) \neq 0$

teza: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v),\ y(u,v)) \cdot |J(u,v)|dudv$

WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE

$x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi$

$y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$

PRZ. $D = \left\{(x,y):\ x \in [0,R],\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$

$r \in [0,R], \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$D' = \left\{(r,\varphi):\ r \in [0,R],\ \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$

$\Phi : (r,\varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

$J(r,\varphi) = r$

TW. (o przejściu na współrzędne biegunowe w całce podwójnej)

zał: $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$D' = \{(r,\varphi),\ r \in \ldots,\ \varphi \in \ldots)\}$

$D = \{(x,y),\ldots\}$

$\Phi:\ D' \ni (r,\varphi) \longrightarrow (x,y) \in D$

$f:\ D \to \mathbb{R}$ ciągła

teza: $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\, dr\, d\varphi$

PRZ. $\displaystyle\iint\limits_D y\, dx\, dy$, gdzie D - ćwiartka koła o promieniu R w I ćw. układu współrzędnych

$D' = \left\{(r,\varphi):\ r \in [0,R],\ \varphi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\}$

$$\iint\limits_D y\, dx\, dy = \iint\limits_{D'} r\sin\varphi \cdot r\, dr\, d\varphi = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\varphi\, d\varphi = \int\limits_0^R r^2 dx[-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \int\limits_0^R r^2 dr\left(-\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right) = \int\limits_0^R r^2 dr(0+1) = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{R^3}{3}$$

TW. (o interpretacji geometrycznej całki podwójnej)

zał: D - regularny

$f:\ D \to \mathbb{R}_+$ ciągła

teza: objętość bryły $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ (x,y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\}$ jest równa

$|V| = \displaystyle\iint\limits_D f(x,y)dx\, dy$

TW. (wzór na objętość obszaru)

zał: $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ (x,y) \in D,\ \varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)\}$

gdzie D - obszar regularny

$\varphi, \psi:\ D \to \mathbb{R}$ ciągłe

teza: $|V| = \displaystyle\iint\limits_D [\psi(x,y) - \varphi(x,y)]dx\, dy$

PRZ. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2+y^2}$ oraz $z = 2 - x^2 - y^2$.

$z = 2 - x^2 - y^2 = 2 - (x^2+y^2)$

$\psi(x,y) = 2 - x^2 - y^2$

$\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = 2 - (x^2+y^2) \end{cases}$

$z = 2 - (x^2+y^2)$

$z = 2 - z^2$

$z^2 + z - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$z_1 = -2 \quad z_2 = 1$

$1 = \sqrt{x^2+y^2} \quad |\ ()^2$

$1 = x^2 + y^2$

$D = K((0,0),1)$

$$|V| = \iint\limits_D \left[(2-x^2-y^2) - \sqrt{x^2+y^2}\right] dxdy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ |J| = r \\ r \in [0,1] \\ \varphi \in [0,2\pi] \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{2\pi} [2-r^2-r] r\, d\varphi = \int\limits_0^1 (2r - r^3 - r^2) dr \cdot 2\pi = 2\pi \left[r^2 - \frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{3} r^3 \right]_0^1 = \dots$$

Zastosowanie całki podwójnej w fizyce

D - obszar regularny

- Pole powierzchni obszaru D: $|D| = \iint\limits_D dxdy$

  $\rho : D \to \mathbb{R}_+$ gęstość powierzchniowa masy, ładunku elektrycznego, ...

- Masa obszaru D: $M = \iint\limits_D \rho(x,y) dxdy$

- Moment statyczny względem osi OX obszaru D

  $M_{OX} = \iint\limits_D y\rho(x,y) dxdy$

  względem osi OY

  $M_{OY} = \iint\limits_D x\rho(x,y) dxdy$

- Środek ciężkości obszaru D

  $\begin{cases} x_0 = \frac{M_{OY}}{M} \\ y_0 = \frac{M_{OX}}{M} \end{cases}$

- Moment bezwładności względem punktu $(0,0)$ obszaru D

  $M_B = \iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y) dxdy$

PRZ. Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnej ćwiartki koła o promieniu R.

$\rho(x,y) = \rho$

$x_0 = y_0$

$M_{OX} = \iint\limits_D \rho y dxdy = \frac{R^3}{3}\rho$

$M = \iint\limits_D \rho dxdy = \rho \iint\limits_D dxdy = \rho \cdot |D| = \rho \cdot \frac{1}{4}\pi R^2$

$y_0 = \frac{M_{OX}}{M} = \frac{\frac{R^3}{3}\rho}{\rho \cdot \frac{1}{4}\pi R^2} = \frac{4}{3\pi}R.$

PRZ. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego koła o promieniu R względem punktu leżącego na brzegu tego koła.

$M_B = \iint\limits_D (x^2+y^2)\rho dxdy = *$

<u>1. sposób</u>

$x = r\cos\varphi$

$y = r \sin \varphi$
$(x-R)^2 + y^2 = R^2$
$x^2 - 2Rx + \cancel{R^2} + y^2 = \cancel{R^2}$
$r^2 \cos^2 \varphi - 2Rr \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 0$
$r^2 - 2Rr \cos \varphi = 0$
$r(r - 2R \cos \varphi) = 0$
$r = 0 \quad \vee \quad r = 2R \cos \varphi$
$r \in [0,\ 2R \cos \varphi]$
$\varphi \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$

$$* = \rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{2R\cos\varphi} r^2 \cdot r dr = \rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2R\cos\varphi} = \rho \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16r^4 \cos^4 \varphi d\varphi = \ldots$$

<u>2. sposób</u>
$x = r \cos \varphi + R$
$y = r \sin \varphi$
$(x-R)^2 + y^2 = R^2$
$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = R^2$
$r^2 - R^2 = 0$
$r = R$
$r \in [0,\ R] \quad \varphi \in [0,\ 2\pi]$
r nie zależy od φ, ani φ od r, więc kolejność jest dowolna

$$* = \rho \int\limits_0^R dr \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \varphi + 2Rr \cos \varphi + R^2 + r^2 \sin^2 \varphi) \cdot r d\varphi =$$
$$= \rho \int\limits_0^R dr \int\limits_0^{2\pi} (r^3 + 2Rr^2 \cos \varphi + R^2 r) d\varphi =$$
$$= \rho \int\limits_0^R dr [r^3 \varphi + 2Rr^2 \sin \varphi + R^2 r \varphi]_0^{2\pi} =$$
$$= \rho \int\limits_0^R [2\pi r^3 + 2Rr^2 \sin 2\pi + R^2 r^2 \pi - (0+0+0)] dr =$$
$$= \rho \int\limits_0^R (2\pi r^3 + R^2 r^2 \pi) dr = \ldots$$

CAŁKA POTRÓJNA
Całka potrójna po prostopadłościanie
$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

- Tworzymy ciąg podziałów prostopadłościanu P
  Podział prostopadłościanu P: dzielimy prostopadłościan P na n mniejszych prostopadłościanów $P_1, P_2, \ldots, P_n$
- $\forall\ i = 1, \ldots, n\ \underbrace{(c_i, d_i, e_i)}_{\text{punkt pośredni}} \in P_i$
- Ciąg podziałów nazywamy normalnym, jeśli $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$ ($\delta_n = \max\{\text{dł. przekątnej } P_i, i = 1, \ldots, n\}$)
- $f:\ P \to \mathbb{R}$ funkcja trzech zmiennych

- Tworzymy sumy całkowe $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i, d_i, e_i) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{objętość prostopadłościanu } P_i}}{|P_i|}$

DEF. $\iiint\limits_P f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} S_n$

o ile ta granica nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów normalnych, ani wyboru punktów pośrednich.

$\uparrow$

całka potrójna po prostopadłościanie P funkcji f.

DEF. V - obszar ograniczony $\subset \mathbb{R}^3$

$\exists\, P$ - prostopadłościan taki, że $V \subseteq P$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, \underset{dx\,dy\,dz}{\underset{\shortparallel}{dV}} \overset{\text{def}}{=} \iiint\limits_P (f \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{funkcja charakterystyczna}}}{\chi_D})(x,y,z)\, dV$$

DEF. Obszarem normalnym względem płaszczyzny OXY nazywamy zbiór

$V = \{(x,y,z):\ (x,y) \in D,\ \Phi(x,y) \leqslant z \leqslant \Psi(x,y)\}$,

gdzie D jest obszarem regularnym $\subset \mathbb{R}^2$,

$\phi, \psi:\ D \to \mathbb{R}$ ciągłe

TW. (całka iterowana dla obszaru normalnego względem płaszczyzny OXY**)**

zał: V - obszar normalny względem płaszczyzny OXY

$f:\ V \to \mathbb{R}$ ciągła

teza: $$\iiint\limits_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_D dx\, dy \int\limits_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\, dz$$

Jeśli ponadto obszar D jest normalny względem osi OX, to:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z) dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int\limits_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\, dz$$

PRZ. $\iiint\limits_V x dV$, gdzie V jest ograniczony płaszczyznami $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

1. Rzutujemy obszar V na płaszczyznę OXY

2. $z = 0 \qquad \Phi(x,y) = 0$

   $\Psi(x,y) = 1 - x - y$

   $$\iiint\limits_V x\, dv = \iint\limits_D dx\, dy \int\limits_0^{1-x-y} x\, dz = *$$

3. $y = \psi(x) = 1 - x$

   $y = \varphi(x) = 0$

   $$* = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} x\, dz = \int\limits_0^1 x\, dx \int\limits_0^{1-x} dy [z]_0^{1-x-y} =$$

   $$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y-0) dy = \int\limits_0^1 x\, dx [y - xy - \frac{1}{2}y^2]_0^{1-x} =$$

$$= \int_0^1 dx[1-x-x(1-x)-\frac{1}{2}(1-x)^2] =$$

$$= \int_0^1 xdx[1-2x+x^2-\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}x^2] = \ldots$$

DEF. Obszarem regularnym (w $\mathbb{R}^3$) nazywamy sumę skończonej liczby obszarów normalnych względem pewnej płaszczyzny (OXY, OXZ, OYZ)

$V = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n, \quad \mathrm{int}V_i \cap \mathrm{int}V_j = \varnothing \quad \forall_{\substack{i,j \\ i \neq j}}$

Współrzędne sferyczne

Wybieramy jeden z kątów θ, ψ

θ	ψ
$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \end{cases}$
$r \geqslant 0$,	$r \geqslant 0$,
$\varphi \in [0, 2\pi]$,	$\varphi \in [0, 2\pi]$
$\theta \in [0, \pi]$	$\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\lvert J\rvert = r^2\sin\theta$	$\lvert J\rvert = r^2\cos\psi$

Wzór na przejście na współrzędne sferyczne w całce potrójnej:

$$\iiint_V f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\ dr\,d\theta\,d\varphi$$

analogiczny wzór dla ψ

Zastosowanie całki potrójnej

- Objętość bryły V: $\lvert V\rvert = \iiint_V dV$

  $\rho : V \to \mathbb{R}_+$ gęstość masy, ładunku elektrycznego, ...

- Masa bryły V : $M = \iiint_V \rho(x,y,z)dx\,dy\,dz$

- Momenty statyczne bryły V względem płaszczyzn:

  $M_{OXY} = \iiint_V z\cdot\rho(x,y,z)dV$

  $M_{OYZ} = \iiint_V x\cdot\rho(x,y,z)dV$

  $M_{OXZ} = \iiint_V y\cdot\rho(x,y,z)dV$

- Środek ciężkości bryły V

  $x_0 = \frac{M_{OYZ}}{M} \quad y_0 = \frac{M_{OXZ}}{M} \quad z_0 = \frac{M_{OXY}}{M}$

- Moment bezwładności bryły V względem osi OZ

  $M_b = \iiint_V (x^2+y^2)\ \rho(x,y,z)dV$

PRZ. Obliczyć moment bezwładności jednorodnej kuli o promieniu R i masie M względem osi zawierającej średnicę tej kuli.

$$M_B = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\rho dV \overset{\text{dla } \psi}{=} \left| \begin{array}{l} x = r\cos\psi\cos\varphi \\ y = r\cos\psi\sin\varphi \\ z = r\sin\psi \\ |J| = r^2\cos\psi \\ r\in[0,R] \\ \varphi\in[0,2\pi] \\ \psi\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \end{array} \right|$$

$$= \rho\int\limits_0^R dr\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\psi\cdot r^2\cos\psi\, d\psi = \rho\int\limits_0^R r^4 dr\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\, d\psi =$$

$$= \rho\tfrac{1}{5}R^5\cdot 2\pi\left[\sin\psi-\tfrac{1}{3}\sin^3\psi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \rho\tfrac{2\pi}{5}R^5\left[\left(1-\tfrac{1}{3}-(-1+\tfrac{1}{3})\right)\right] = \rho\tfrac{2}{5}\pi R^5\tfrac{4}{3} = \tfrac{8}{15}\rho\pi R^5 =$$

$$= \left|M=\rho\cdot|V| = \rho\cdot\tfrac{4}{3}\pi R^3\right| = \tfrac{2}{5}MR^2.$$

Całka niewłaściwa wielokrotna (podwójna, potrójna)

$D\subseteq\mathbb{R}^2$ (lub w $\mathbb{R}^3$)

D - nieograniczony lub f nie jest ograniczona na D $(\to\pm\infty)$

- Tworzymy ciąg zbiorów $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$
  $\forall i \quad D_i$ - regularny
  $\forall i \quad D_i\subset D_{i+1}$ („ciąg wstępujący”)
  $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$
  $\forall i \quad f:\ D_i\to\mathbb{R}$ całkowalna

DEF. $\displaystyle\int\limits_D\cdots\int f(x,\ldots)\,dx\ldots \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\int\limits_{D_n}\cdots\int f(x,\ldots)\,dx\ldots$

PRZ. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = ?$, $\qquad f(x)=e^{-x^2}$ - funkcja gęstości w rozkładzie normalnym Gaussa

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2$$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = |D=K((0,0),R)| = \lim_{R\to\infty}\iint\limits_{K((0,0),R)} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy = \left| \begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\cos\varphi \\ r\in[0,R] \\ \varphi\in[0,2\pi] \\ |J|=r \end{array}\right| =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R dr\int\limits_0^{2\pi}e^{-r^2}\cdot r d\varphi = 2\pi\lim_{R\to\infty}\int\limits_0^R re^{-r^2}dr = 2\pi\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = 2\pi\lim_{R\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-R^2}+\frac{1}{2}\right] =$$

$$= 2\pi\cdot\tfrac{1}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Całka krzywoliniowa nieskierowana

DEF. Łuk gładki $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$

$x(t),\ y(t)\ \in C^1([\alpha,\beta])$
$\forall t \in [\alpha,\beta] \quad [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$

DEF.

- Tworzymy podziały
  $\underset{\alpha}{\underset{\shortparallel}{t_0}} < t_1 < t_2 < \ldots < \underset{\beta}{\underset{\shortparallel}{t_n}}$
- Średnica podziału
  $\delta_n = \max\{t_i - t_{i-1} :\ i = 1, \ldots, n\}$
- Ciąg podziałów nazywamy normalnym $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$
- $\forall i = 1, \ldots, n \quad c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ - punkt pośredni
- $f :\ L \to \mathbb{R}$
- Suma całkowa
  $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x(c_i), y(c_i)) \cdot \overset{\text{długość łuku}}{|A_{i-1}A_i|} =$
  $= \sum\limits_{i=1}^{n} f(x(c_i), y(c_i)) \cdot \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$

DEF. Całką krzywoliniową nieskierowaną funkcji f po łuku L nazywamy
$\int\limits_L f(x,y)dl \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\delta_n \to 0)}} S_n,$
o ile ta granica nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów normalnych, ani od wyboru punktów pośrednich w przedziałach.

TW. Zał: L - łuk gładki (zadany parametrycznie przez $x(t)$, $y(t)$)
$f :\ L \to \mathbb{R}$ ciągła

Teza: $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$

TW. Zał: L - łuk gładki (zadany w sposób jawny $y = y(x)$, $x \in [a,b]$)
$y(x) \in C^1([a,b])$
$f :\ L \to \mathbb{R}$ ciągła

Teza: $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$

DEF. Krzywa regularna jest sumą skończonej liczby łuków gładkich
$K = L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$.

DEF. Jeżeli K - krzywa regularna, to $\int\limits_K f(x,y)dl \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{L_i} f(x,y)dl$

Zastosowania całki krzywoliniowej nieskierowanej

- Długość łuku: $|L| = \int\limits_L dl$
- Masa łuku: $M = \int\limits_L \rho(x,y)dl$
- Momenty statyczne: $M_{OX} = \int\limits_L y\rho(x,y)dl$
  $M_{OY} = \int\limits_L x\rho(x,y)dl$
- Środek ciężkości: $x_0 = \frac{M_{OY}}{M}$ $\quad y_0 = \frac{M_{OX}}{M}$
- Moment bezwładności względem punktu (0, 0): $M_B = \int\limits_L (x^2+y^2)\rho(x,y)dl$

Analogiczne wzory dla całki krzywoliniowej po krzywej $L \subset \mathbb{R}^3$

TW. Zał: L - łuk gładki (zadany parametrycznie przez $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$)
$f : L \to \mathbb{R}$ ciągła

Teza: $\int\limits_L f(x,y,z)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt.$

PRZ. Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnego półokręgu o promieniu R.

$\rho(x,y) = \rho$

$M = \int\limits_L \rho dl = \rho \int\limits_L dl = \rho|L| = \rho\pi R$

$x_0 = 0 \quad y_0 = ?$

$$M_{OX} = \int\limits_L y\rho dl = \rho \int\limits_L ydl = \left| \begin{array}{l} \text{I sp.} \\ x \in [-R,R] \\ y = y(x) = \sqrt{R^2-x^2} \\ \text{II sp.} \\ x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ t \in [0,\pi] \end{array} \right| =$$

$$= \rho \int\limits_0^\pi R\sin t\sqrt{(-R\sin t)^2+(R\cos t)^2}dt = \rho \int\limits_0^\pi R\sin t \cdot Rdt = \rho R^2 \int\limits_0^\pi \sin t \, dt =$$

$$= \rho R^2[-\cos t]_0^\pi = \rho \cdot R^2[-\cos\pi+\cos 0] = 2\rho R^2$$

$y_0 = \frac{M_{OX}}{M} = \frac{2\cancel{\rho}R^{\cancel{2}}}{\cancel{\rho}\pi\cancel{R}} = \frac{2}{\pi}R$

CAŁKA KRZYWOLINIOWA SKIEROWANA

L - łuk gładki

$\overrightarrow{F} : L \to \mathbb{R}^2$ pole wektorowe

$\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

- Tworzymy ciąg podziałów normalnych
  $\underset{\alpha}{\overset{\shortparallel}{t_0}} < t_1 < \ldots < \underset{\beta}{\overset{\shortparallel}{t_n}}$

- $\forall\ i = 1, \ldots, n\ c_i \in [t_{i-1}, t_i]$

- Tworzymy sumę całkową

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{(P(x(c_i), y(c_i)),\ Q(x(c_i), y(c_i)))} \circ \overrightarrow{A_{i-1}A_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [P(x(c_i), y(c_i)) \cdot (x(t_i) - x(t_{i-1})) + Q(x(c_i), y(c_i)) \cdot (y(t_1) - y(t_{i-1}))]$$

DEF. **Całką krzywoliniową skierowaną** funkcji wektorowej $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ po łuku L nazywamy

$$\int_L \overrightarrow{F} \circ \overrightarrow{dr} = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\delta_n \to 0)}} S_n$$

(o ile ta granica nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów normalnych, ani od wyboru punktów pośrednich).

TW. Zał: L - łuk gładki
$\overrightarrow{F} = (P, Q)$
$P, Q:\ L \to \mathbb{R}$ ciągłe

Teza: $$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)]dt$$

TW. Zał: K - krzywa regularna
$-K$ - ta sama krzywa regularna o przeciwnej orientacji

Teza: $$\int_{-K} Pdx + Qdy = -\int_K Pdx + Qdy$$

DEF. Jeśli K - krzywa regularna, to

$$\int_K Pdx + Qdy = \sum_{i=1}^{n} \int_{L_i} Pdx + Qdy$$

Analogicznie wprowadza się definicję całki krzywoliniowej po krzywej $L \subset \mathbb{R}^3$ (i wzór na jej obliczanie jest analogiczny).

PRZ. Oblicz $\int_L x\, dx + y\, dy + z\, dz$, gdzie L jest odcinkiem od punktu $A(1,1,1)$ do $B(2,3,4)$.

$$(x,y,z) = (1,1,1) + t(2-1,\ 3-1,\ 4-1)$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \qquad t \in [\underset{\text{dla } A}{0},\ \underset{\text{dla } B}{1}]$$

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)]dt =$$

$$= \int_0^1 [(1+t) \cdot 1 + (1+2t) \cdot 2 + (1+3t) \cdot 3]dt = \ldots$$

Przypomnienie: D - obszar (otwarty i spójny zbiór)
∂D - brzeg obszaru D

DEF. Obszar D nazywamy obszarem **obszarem jednospójnym** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ gdy wnętrze każdej krzywej zamkniętej (bez punktów wielokrotnych) zawartej w D zawiera się w obszarze D.

TW. Jeśli obszar D jest obszarem jednospójnym ograniczonym, to brzeg obszaru D jest krzywą Jordana (tzn. krzywą zamkniętą bez punktów wielokrotnych).

DEF. Brzeg obszaru jednospójnego ograniczonego D nazywamy **zorientowanym dodatnio** względem tego obszaru $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ gdy poruszając się po tym brzegu zgodnie z wybraną orientacją obszar D znajduje się po lewej stronie.

PRZ. Orientacja dodatnia a obieg zgodny z ruchem wskazówek zegara.

TW. (Greena)
Zał: D - obszar jednospójny ograniczony
$\overrightarrow{F} = (P, Q)$
$P, Q \in C^1(D \cup \partial D)$,
∂D - jest zorientowany dodatnio względem obszaru D
Teza: $$\oint\limits_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dx\, dy$$

PRZ. Oblicz $\int\limits_{L} y^2 dx - x^2 dy$, gdzie $L:\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ zorientowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara.
$P(x,y) = y^2$
$Q(x,y) = -x^2$
$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$
$$\int\limits_{L} y^2 dx - x^2 dy \overset{\substack{\text{ujemnie}\\ \downarrow}}{=} - \iint\limits_{D} (-2x - 2y) dx\, dy = 2 \iint\limits_{D} (x+y) dx\, dy = \left| \begin{array}{l} x = r\cos\varphi + 1 \\ y = r\sin\varphi + 1 \\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ r \in [0,1] \end{array} \right| =$$
$$= 2 \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{2\pi} (r\cos\varphi + r\sin\varphi + 2) r\, d\varphi = \ldots$$

DEF. Mówimy, że pole wektorowe $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ jest **polem potencjalnym** w obszarze D $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ gdy istnieje taka funkcja różniczkowalna $u:\ D \to \mathbb{R}$, że
$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$
(tzn $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)\ \forall (x,y) \in D$)
Funkcję $u(x,y)$ nazywamy **potencjałem pola wektorowego** $\overrightarrow{F} = (P,Q)$ na obszarze D.

TW. (WKW na potencjalność pola płaskiego)
Zał: $\overrightarrow{F} = (P,Q)\ \in C^1(D)$
D - obszar jednospójny
Teza: pole $\overrightarrow{F}$ jest potencjalne w $D \Leftrightarrow \forall\ (x,y) \in D:\ \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)}_{\text{te same pochodne cząstkowe co w tw. Greena}}$

TW. (o niezależności całki krzywoliniowej od kształtu krzywej w polu potencjalnym)

Zał: $\overrightarrow{F} = (P,Q) \in C^1(D)$

D - obszar jednospójny

Teza: całka krzywoliniowa skierowana nie zależy od kształtu krzywej regularnej $K \subset D$ w polu potencjalnym ale tylko od położenia końców tej krzywej.

Ponadto zachodzi wzór: $\int\limits_{\overline{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A)$,

gdzie $K = \overline{AB}$ oraz u jest potencjałem pola wektorowego w D.

TW. Całka krzywoliniowa skierowana po dowolnej krzywej regularnej zamkniętej zawartej w obszarze D, w którym pole wektorowe jest potencjalne jest równa 0.

PRZ. Oblicz

Oblicz $\int\limits_K 2xydx + (x^2 - y^2)dy = *$, gdzie $K : \begin{cases} x = t^5 \operatorname{arctg} t \\ y = \arcsin t \\ \text{od } A(0,0) \text{ do } B(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

$t = 0 \quad x(0) = 0^5 \cdot \operatorname{arctg} 0$

$\qquad y(0) = \arcsin 0$

$t = 1 \quad x(1) = 1^5 \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$

$\qquad y(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

<u>I sposób</u>

$$* = \int\limits_0^1 \left[2 \cdot t^5 \operatorname{arctg} t \cdot \arcsin t \cdot (t^5 \cdot \operatorname{arctg} t)' - (\arcsin^2 t' - t^{10} \operatorname{arctg}^2 t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right] dt = \dots$$

<u>II sposób</u>

$P(x,y) = 2xy \quad Q(x,y) = y^2 - x^2$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \underset{D \text{ jednospójny}}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{R}^2}}$

$\overset{\text{z tw WKW}}{\Rightarrow}$ pole $\overrightarrow{F} = (P,Q)$ jest potencjalne w $\mathbb{R}^2$

$P(x,y) = 2xy \quad Q(x,y) = x^2 - y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

$$u = \int P(x,y)dx = \int 2xydx = 2y \int xdx = 2y \cdot \frac{1}{2}x^2 + C(y) = x^2y + C(y)$$

$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y + C(y)) = Q(x,y)$

$\cancel{x^2} + C'(y) = \cancel{x^2} - y^2$

$C'(y) = -y^2$

$$C(y) = \int C'(y)dy = \int -y^2 dy = -\frac{1}{3}y^3 + C$$

$u = u(x,y) = x^2y - \frac{1}{3}y^3 + C$

$$* = u\left(\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{2}\right) - u(0,0) == \left(\left(\tfrac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{\pi}{2}\right)^3 + C \right) - (0 - 0 + C) = \tfrac{\pi^3}{32} - \tfrac{\pi^3}{24} = -\pi^3 \cdot \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\right) = -\tfrac{\pi^3}{96}$$

<u>III sposób</u>

Pokazaliśmy już wcześniej, że $\overrightarrow{F} = (P,Q)$ jest potencjalne w $\mathbb{R}^2$

$$* = \int\limits_{AB} 2xydx + (x^2 - y^2)dy = \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} [2t \cdot 2t \cdot (t)' + (t^2 - 4t^2)(2t)']dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 4t^2 - 6t^2 dt = -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 dt = -2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = -\frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{\pi^3}{16 \cdot \cancel{4}_2} = -\frac{\pi^3}{96}$$

PRZ. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną pola wektorowego $\overrightarrow{F} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$ po okręgu $x^2 + y^2 = 1$ skierowanym dodatnio.

I sposób (niepoprawny)

$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad Q(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\left(\frac{x^2+y^2-2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

pole jest potencjalne

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \not\Rightarrow$

$\not\Rightarrow \int\limits_K \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{-x}{x^2+y^2}dy \overset{*}{=} 0$

bo $(0,0) \notin D$ (więc D nie jest jednospójny i pole wcale nie jest potencjalne w D)

II sposób

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$* = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{1}(-\sin t) + \frac{-\cos t}{1} \cdot \cos t\right) dt = -\int\limits_0^{2\pi} dt = -[t]_0^{2\pi} = -2\pi$$