Analiza I, egzaminy 2021/22

Termin 1

1. a) Podaj definicję funkcji ciągłej w punkcie i funkcji różniczkowalnej w punkcie.

b) Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ c, & x = 0 \\ a\sin x + b, & x > 0. \end{cases}$

Dla jakich wartości parametrów a, b, c funkcja f jest ciągła w całej dziedzinie a dla jakich wartości parametrów a, b, c funkcja f jest różniczkowalna w całej dziedzinie?

c) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o związku między ciągłością i różniczkowalnością funkcji, z którego skorzystałeś w podpunkcie b).

2. a) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia Taylora.

b) Napisz wzór Taylora dla funkcji $f(x) = \ln x$ w punkcie $x_0 = 1$ z resztą rzędu $n = 3$.

c) Korzystając z wzoru z a) odrzucając resztę oblicz przybliżoną wartość $\ln(0,9)$.

d) Oszacuj błąd bezwzględny jaki został popełniony przy obliczaniu $\ln(0,9)$ w podpunkcie c).

3. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^x$.

4. Wyznacz funkcję pierwotną funkcji $f(x) = \begin{cases} \text{arcsin}x, & 0 < x < 1 \\ \frac{2\text{arctg}x}{x^2}, & x \geqslant 1. \end{cases}$

5. Narysuj krzywą (zadaną we współrzędnych biegunowych) $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$ oraz oblicz pole obszaru ograniczonego tą krzywą i długość tej krzywej.

Termin 2

1. a) Pokaż, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\ln(1 + x) < x$.

b) Pokaż, że ciąg o wyrazie $a_n = (1 + \frac{1}{1\cdot2})(1 + \frac{1}{2\cdot3})(1 + \frac{1}{3\cdot4}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{n(n+1)})$ jest zbieżny.

2. a) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o wzorze Taylora.

b) Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego $\sqrt[3]{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{3}$ dla $|x| \leqslant \frac{1}{10}$.

3. Wyznacz wymiary stożka opisanego na kuli o promieniu R, który ma najmniejszą objętość.

4. Korzystając z definicji całki Riemanna oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{n}}{n}$.

5. Oblicz pole powierzchni bryły powstałej z obrotu dookoła osi OX jednego łuku cykloidy
$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Termin 3

1. Oblicz granicę ciągów: $a_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}}$, $\quad b_n = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$,
$c_n = (1 - \sin\frac{1}{n})^n$.

2. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = xe^{-\frac{1}{x}}$.

3. Napisz wzór Maclaurina z resztą R_3 dla funkcji $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ a następnie udowodnij, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\sqrt[3]{1+x} > 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$.

4. Oblicz całkę $\int\limits_0^{+\infty} \frac{3}{1+x^3}dx$.

5. Narysuj krzywą (zadaną we współrzędnych biegunowych) $r(\varphi) = a\varphi$, gdzie $\varphi \in [0, 2\pi]$ i oblicz długość tej krzywej.