Analiza I, egzaminy 2022/23

Termin 1

1. Udowodnij, że ciąg rekurencyjny: $x_1 = 6; \quad x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ dla $n \geqslant 1$, jest zbieżny i znajdź jego granicę.

2. Udowodnij, dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.
Podpowiedź. Skorzystaj m. in. z twierdzenia Taylora w pewnym przedziale.

3. Oblicz całkę $\int \frac{dx}{(1-e^x)^4}$.

4. Oblicz pole obszaru ogranicznego krzywą $(x^2 + y^2)^2 = x^3$.

5. a) Podaj definicję zbioru zwartego w przestrzeni metrycznej (X, d).
b) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o obrazie zbioru zwartego poprzez odwzorowanie ciągłe.
c) Udowodnij twierdzenie z b).

Termin 2

1. a) (1p) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia Rolle'a.
b) (1p+4p) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia Lagrange'a i udowodnij go.
c) (4p) Korzystając z twierdzenia Lagrange'a udowodnij następujące "oczywiste" twierdzenie:
Zał.: 1) $\forall x \in (a, b)\ f'(x) > 0$,
2) f jest ciągła (prawostronnie) w punkcie a.
Teza: $\forall x \in (a, b)\ f(x) > f(a)$.

2. Udowodnij, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.
Podpowiedź. Skorzystaj m. in. z twierdzenia Taylora w pewnym przedziale.

3. Wyznacz wymiary trapezu (wysokość i długość krótszej podstawy) o największym polu wpisanego w półkole o promieniu R w taki sposób, że jego dłuższa podstawa jest średnicą tego półkola.

4. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2}$ korzystając z definicji całki Riemanna. (Zrób to bardzo dokładnie podając m. in. wartości punktów podziału x_i i punktów pośrednich c_i).

5. Oblicz długość krzywej $y = \ln \cos x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Termin 3

1. a) Udowodnij, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\ln(1 + x) < x$.
b) Pokaż, że ciąg o wyrazie $a_n = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{27}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{3^n})$ jest zbieżny.

2. Wyznacz wymiary ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wpisanego w sferę o promieniu R, który ma największą objętość.

3. Wyznacz funkcję $\phi(x) = \int\limits_{(-\infty,\, x]} f(t)dt$, jeśli $f(x) = \begin{cases} e^x \cos x, & x < 0 \\ \sqrt{1 + x^2}, & x \geqslant 0. \end{cases}$
Czy funkcja ϕ jest funkcją pierwotną funkcji f? Odpowiedź uzasadnij.

4. Oblicz pole obszaru ograniczonego krzywymi: $r = \frac{1}{\varphi}$, $r = \frac{1}{\sin \varphi}$, gdzie $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

5. a) Podaj definicje: ciągu Cauchy'ego, przestrzeni zupełnej, normy (w odpowiedniej przestrzeni) i przestrzeni Banacha.
b) Czy przestrzeń $([0, 1), |\cdot|)$ jest przestrzenią zupełną? Odpowiedź uzasadnij.