Analiza I, egzaminy 2023/24

Termin 1

1. Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu wpisanego w odcinek paraboli $y^2 = 2ax$ ograniczony prostą $x = 2a$, gdzie $a > 0$.

2. a) Udowodnij, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $e^{\sqrt{x}} > 1 + \sqrt{x}$.
b) Sprawdź zbieżność całki $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1} dx$.

3. Oblicz pole powierzchni (bocznej) bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX krzywej $y = \operatorname{tg} x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

4. Niech X i Y będą dwiema przestrzeniami topologicznymi i $f : X \to Y$.
a) Podaj definicję funkcji f zbieżnej w punkcie $x_0 \in X$ do punktu $y_0 \in Y$.
b) Podaj definicję ciągłości f na przestrzeni X.
c) Podaj definicję przestrzeni niespójnej i przestrzeni spójnej.
d) Podaj i udowodnij twierdzenie o obrazie przestrzeni spójnej poprzez odwzorowanie ciągłe.

Termin 2

1. a) (3p) Udowodnij, że dla każdego $x > -1$ zachodzi nierówność $\ln(1 + x) \leqslant x$.
b) (2p) Dany jest ciąg rekurencyjny: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$.
Wyznacz wzór jawny na a_n i udowodnij metodą indukcji matematycznej jego poprawność.
c) (5p) Pokaż, że ciąg o wyrazie $b_n = (1 + \frac{1}{1^2})(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{3^2})(1 + \frac{1}{4^2}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{n^2})$ jest zbieżny.

2. Wykonaj uproszczone (tzn. bez analizy drugiej pochodnej) badanie przebiegu zmienności funkcji $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

3. Oblicz całkę $\int \operatorname{tg} x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^4 x}} dx$.

4. Podaj definicję maksimum lokalnego funkcji i dokładną wypowiedź twierdzenia będącego warunkiem koniecznym istnienia maksimum lokalnego. Udowodnij to twierdzenie.

Termin 3

1. a) (3p) Udowodnij, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\ln x \leqslant x - 1$.
b) (7p) Pokaż, że ciąg o wyrazie $a_n = (1 + \frac{1}{1\cdot 2})(1 + \frac{1}{2\cdot 3})(1 + \frac{1}{3\cdot 4}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{n\cdot(n+1)})$ jest zbieżny.
2. Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu wpisanego w elipsę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a > 0$, $b > 0$.
3. Narysuj krzywą zadaną we współrzędnych biegunowych wzorem $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$ (gdzie $a > 0$) oraz oblicz pole obszaru ograniczonego tą krzywą i długość tej krzywej.
4. Niech $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subseteq \mathbb{R}$.
a) (2p) Podaj definicję (Heinego) zbieżności funkcji f w punkcie x_0 do g.
b) (1p) Podaj definicję ciągłości funkcji f w punkcie x_0.
c) (2p) Podaj definicję pochodnej funkcji f w punkcie x_0.
d) (5p) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o związku między różniczkowalnością funkcji w punkcie x_0 i ciągłością funkcji w punkcie x_0 oraz udowodnij to twierdzenie.