Analiza II, egzaminy 2021/22

Termin 1

Zad. 1. Wyznacz obszar zbieżności punktowej D_p i sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-nx}$.
Sprawdź, czy szereg ten jest również zbieżny jednostajnie w D_p.

Zad. 2. Rozwiń w szereg Taylora o środku w $x_0 = -1$ funkcję $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Dla jakich x funkcja $f(x)$ jest równa sumie otrzymanego rozwinięcia?

Zad. 3. Dana jest funkcja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

a) Sprawdź, czy pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}$ istnieje i jest ciągła w punkcie $(0, 0)$.
b) Sprawdź różniczkowalność funkcji f w punkcie $(0, 0)$.

Zad. 4. Oblicz objętość części wspólnej walców: $x^2 + y^2 = R^2$ i $x^2 + z^2 = R^2$.

Zad. 5. a) Pokaż, że pole wektorowe $\mathbf{F} = (4xy^3 - \frac{1}{y}, 6x^2y^2 + \frac{x}{y^2})$ jest polem potencjalnym w pewnym obszarze D. Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.
b) Oblicz $\int_{(0,1)}^{(3,2)}(4xy^3 - \frac{1}{y})dx + (6x^2y^2 + \frac{x}{y^2})dy$. Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.

Termin 2

Zad. 1. Zbadaj zbieżność szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt{n}}}$.

Zad. 2. Korzystając z odpowiedniego szeregu potęgowego oblicz sumę szeregu $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Zad. 3. Wyznacz ekstrema warunkowe funkcji $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Zad. 4. Oblicz moment bezwładności jednorodnej bryły $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2, \ \ z \geqslant 1\}$ o gęstości ρ.

Zad. 5. Wyznacz środek ciężkości części jednorodnej asteroidy: $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Termin 3

Zad. 1. a) Wyznacz sumę szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ na $\mathbb{R}$.
b) Sprawdź, czy ten szereg jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$.

Zad. 2. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \mathrm{arctg}(x^2)$. Dla jakich x otrzymany szereg jest zbieżny? Dla jakich x wartość $f(x)$ jest równa sumie otrzymanego szeregu?

Zad. 3. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ w całej dziedzinie.
Podaj wypowiedzi dwóch twierdzeń, z których skorzystałeś (jedno w przypadku gdy $(x, y) \neq (0, 0)$ i drugie gdy $(x, y) = (0, 0)$).

Zad. 4. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ danej równaniem
$x^4 - 2x^2y - x^2 + y^2 + y = 0$.

Zad. 5. Oblicz objętość części wspólnej kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ i walca $x^2 + y^2 - Rx \leqslant 0$.