

Analiza II, egzaminy 2022/23

Termin 1

Zad. 1. Korzystając z odpowiedniego szeregu potęgowego oblicz sumę szeregu liczbowego $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

Zad. 2. Korzystając z metody Lagrange'a wyznacz wymiary prostopadłościanu o największej objętości, jeżeli suma pól powierzchni wszystkich ścian prostopadłościanu jest równa 6.

Zad. 3. Oblicz objętość nieograniczonego obszaru zawartego między płaszczyzną $z = 0$ i powierzchnią $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Zad. 4. Oblicz

$$\int_K \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$$

gdzie K jest częścią asteroidy $x = R \cos^3 t$, $x = R \sin^3 t$ od punktu $(0, R)$ do punktu $(R, 0)$.

Termin 2

Zad. 1. a) Pokaż, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n} - x^{2n+2})$ jest zbieżny punktowo na $[0, 1]$.

Wsk. Oblicz sumę tego szeregu.

b) Sprawdź, czy jest on również zbieżny jednostajnie na tym przedziale. Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 2. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \ln(4 + x^2)$. Dla jakich x suma otrzymanego szeregu jest równa wartości funkcji $f(x)$?

Zad. 3. Sprawdź różniczkowalność w punkcie $(0, 0, 0)$ funkcji $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$.

Wsk. Obliczenie pewnej granicy będzie łatwiejsze gdy skorzysta się ze współrzędnych sferycznych.

Zad. 4. Oblicz objętość części wspólnej kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ i walca $x^2 + y^2 - Rx \leq 0$.

Termin 3

Zad. 1. a) Pokaż, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n} - x^{2n+2})$ jest zbieżny punktowo na $[0, 1]$.

Wsk. Oblicz sumę tego szeregu.

b) Sprawdź, czy jest on również zbieżny jednostajnie na tym przedziale. Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 2. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \ln(4 + x^2)$. Dla jakich x suma otrzymanego szeregu jest równa wartości funkcji $f(x)$?

Zad. 3. Sprawdź różniczkowalność w punkcie $(0, 0, 0)$ funkcji $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$.

Wsk. Obliczenie pewnej granicy będzie łatwiejsze gdy skorzysta się ze współrzędnych sferycznych.

Zad. 4. Oblicz objętość części wspólnej kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ i walca $x^2 + y^2 - Rx \leq 0$.