Analiza II, egzaminy 2023/24

Termin 1

Zad. 1. Rozwiń w szereg sinusów funkcję $f(x) = x(\pi - x)$ w $(0, \pi)$, narysuj wykres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i korzystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots$ Czy otrzymany szereg jest jednostajnie zbieżny do f na $(0, \pi)$. Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 2. Wyznacz ekstrema warunkowe funkcji $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ przy warunku $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Zad. 3. Oblicz moment bezwładności jednorodnej bryły $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Ry$ o masie M względem osi $0Z$.

Zad. 4.a) Wyprowadź wzór na obliczenie całki $\int\limits_K f(x, y)dl$ w przypadku gdy krzywa K jest zadana równaniem biegunowym $r = r(\varphi)$, gdzie $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.
Wsk. $x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$.

b) Oblicz $\int\limits_K \frac{dl}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, gdzie K jest łukiem spirali hiperbolicznej $r = \frac{1}{\varphi}$, gdzie $\sqrt{3} \leqslant \varphi \leqslant 2\sqrt{2}$.
Wsk. $\int\limits_K f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi$.

Termin 2

Zad. 1. Rozwiń w szereg sinusów funkcję $f(x) = x(\pi - x)$ w $(0, \pi)$, narysuj wykres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i korzystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots$ Czy otrzymany szereg jest jednostajnie zbieżny do f na $(0, \pi)$. Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 2. Wyznacz ekstrema warunkowe funkcji $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ przy warunku $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$.

Zad. 3. Oblicz moment bezwładności jednorodnej bryły $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Ry$ o masie M względem osi $0Z$.

Zad. 4.a) Wyprowadź wzór na obliczenie całki $\int\limits_K f(x, y)dl$ w przypadku gdy krzywa K jest zadana równaniem biegunowym $r = r(\varphi)$, gdzie $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.
Wsk. $x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$, $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi$.

b) Oblicz $\int\limits_K \frac{dl}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, gdzie K jest łukiem spirali hiperbolicznej $r = \frac{1}{\varphi}$, gdzie $\sqrt{3} \leqslant \varphi \leqslant 2\sqrt{2}$.
Wsk. $\int\limits_K f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi$.

Termin 3

Zad. 1. a) Pokaż, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^{2n} - x^{2n+2})$ jest zbieżny punktowo na $[0, 1]$.
Wsk. Oblicz sumę tego szeregu.
b) Sprawdź, czy jest on również zbieżny jednostajnie na tym przedziale. Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 2. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \ln(4+x^2)$. Dla jakich x suma otrzymanego szeregu jest równa wartości funkcji $f(x)$?

Zad. 3. Sprawdź różniczkowalność w punkcie $(0,0,0)$ funkcji $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$
Wsk. Obliczenie pewnej granicy będzie łatwiejsze gdy skorzysta się ze współrzędnych sferycznych.

Zad. 4. Oblicz objętość części wspólnej kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ i walca $x^2+y^2-Rx \leqslant 0$.