Algebra liniowa

Wykład dla studentów kierunku Automatyka i robotyka WEAIiIB

Michał Góra
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Kraków 2021

Spis treści

Rozdział 1

Podstawowe struktury algebraiczne

1.1. Działania wewnętrzne

Niech X będzie zbiorem niepustym. Dowolną funkcję $h : X \times X \to X$ nazywamy **działaniem wewnętrznym** w zbiorze X. Działanie wewnętrzne, jak każdą funkcję, możemy określać na wiele sposobów:

- słownie: w grupie studentów jednej z krakowskich uczelni uczęszczających regularnie na wykład z algebery liniowej (zakładamy, że jest to zbiór niepusty) wprowadzamy działanie, które z pary elementów wybiera element starszy (decyduje numer PESEL);
- graficznie: aby zdefiniować funkcję $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wystarczy w układzie $Oxyz$ zaznaczyć stosowne kropki;
- tabelą działań: w zbiorze $X = \{\clubsuit, \spadesuit, \maltese\}$ wprowadzamy działanie h:

h	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\maltese$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\maltese$
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\maltese$	$\clubsuit$
$\maltese$	$\clubsuit$	$\maltese$	$\spadesuit$

,

  na przykład: $h(\spadesuit, \maltese) = \clubsuit$; $h(\maltese, \spadesuit) = \maltese$;
- wzorem: $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \to \max\{x, y\} \in \mathbb{R}$.

1.1.1. Własności działań wewnętrznych

Niech h będzie działaniem wewnętrznym w zbiorze X.

Definicja 1.1. *Element $e \in X$ spełniający warunek*

$$\forall x \in X \qquad h(e, x) = h(x, e) = x \tag{1.1}$$

nazywamy ***elementem neutralnym działania h.***

Zakładając, że w zbiorze X dla pewnego działania wewnętrznego h istnieją dwa elementy neutralne e_1 i e_2, mamy:

$$e_1 = h(e_1, e_2) = e_2.$$

Stąd wynika następujące

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli element neutralny istnieje to jest jedyny.*

Definicja 1.2. *Działanie wewnętrzne $h : X \times X \to X$ nazywamy* **działaniem łącznym**, *jeżeli*

$$\forall x, y, z \in X \qquad h(x, h(y, z)) = h(h(x, y), z). \tag{1.2}$$

Definicja 1.3. *Działanie wewnętrzne $h : X \times X \to X$ nazywamy* **działaniem przemiennym**, *jeżeli*

$$\forall x, y \in X \qquad h(x, y) = h(y, x). \tag{1.3}$$

Niech $h : X \times X \to X$ będzie działaniem wewnętrznym o elemencie neutralnym e.

Definicja 1.4. *Jeżeli dla elementu $x \in X$ istnieje element $\widetilde{x} \in X$ spełniający warunek*

$$h(\widetilde{x}, x) = h(x, \widetilde{x}) = e,$$

to element $\widetilde{x}$ nazywamy **elementem symetrycznym dla elementu x względem działania h**.

Załóżmy, że $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ są dwoma elementami symetrycznymi dla elementu x względem działania łącznego (!) h o elemencie neutralnym e. Wówczas

$$\widetilde{x}_1 = h(e, \widetilde{x}_1) = h(h(\widetilde{x}_2, x), \widetilde{x}_1) = h(\widetilde{x}_2, h(x, \widetilde{x}_1)) = h(\widetilde{x}_2, e) = \widetilde{x}_2,$$

skąd wynika następujące

Twierdzenie 1.2. *Jeżeli działanie wewnętrzne jest łączne oraz posiada element neutralny, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.*

Przykład 1.1. *W zbiorze $X = \{a, b, c\}$ wprowadzamy działanie h określone poniższą tabelą:*

h	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

.

Łatwo stwierdzić, że działanie h posiada element neutralny $e = a$. Ponieważ elementy b oraz c posiadają po dwa elementy odwrotne, którymi są b oraz c:

$$h(b, b) = h(b, c) = h(c, b) = h(c, c) = e = a,$$

zatem, na podstawie twierdzenia 1.2, działanie to nie jest łączne. Faktycznie:

$$c = h(h(b, b), c) \neq h(b, h(b, c)) = b.$$

Przykład 1.2. *Rozważmy ponownie grupę krakowskich studentów uczęszczających na wykład z algebry liniowej. Łatwo sprawdzić, że wprowadzone w tym zbiorze działanie jest łączne i przemienne. Elementem neutralnym względem tego działania jest najmłodszy element, tj. ....; jest on jednocześnie jedynym elementem, który posiada element symetryczny – jest nim on sam.*

1.2. Grupy, pierścienie, ciała

Niech G będzie dowolnym zbiorem niepustym, a $h : G \times G \to G$ działaniem wewnętrznym w G.

Definicja 1.5. *Parę (G, h) nazywamy* **grupą**, *jeżeli:*

- *działanie h jest łączne;*
- *działanie h posiada element neutralny;*

- *każdy element G posiada element symetryczny względem działania h w G.*

Jeżeli działanie h jest przemienne, to grupę (G, h) nazywamy **grupą abelową** *(przemienną).*

Przykład 1.3. *Każda z poniższych struktur jest grupą:*

a) $(\mathbb{Z}, +)$, *tj. zbiór liczb całkowitych z działaniem dodawania liczb; elementem neutralnym jest $e = 0$, elementem symetrycznym dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{Z}$ jest liczba $\widetilde{z} = -z$ (nazywana w tym przypadku elementem przeciwnym);*

b) $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$, *tj. zbiór liczb rzeczywistych bez zera z działaniem mnożenia liczb; elementem neutralnym jest $e = 1$, elementem symetrycznym dla dowolnej liczby $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ jest liczba $\widetilde{r} = \frac{1}{r}$ (nazywana w tym przypadku elementem odwrotnym);*

c) $(\mathbb{Z}_m, +_{\text{mod}\,m})$, *gdzie, dla ustalonej liczby naturalnej m, $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ oraz dla $a, b \in \mathbb{Z}_m$ $(a+b)_{\text{mod}\,m}$ (czyt. $a+b$ modulo m) to reszta z dzielenia $a+b$ przez m, np.*

$$(2+5)_{\text{mod}\,6} = 7_{\text{mod}\,6} = 1.$$

Elementem neutralnym względem działania $+_{\text{mod}\,m}$ jest $e = 0$; elementem symetrycznym jest $\widetilde{n} = m - n$ dla $n \in \mathbb{Z}_m\setminus\{0\}$ oraz $\widetilde{0} = 0$;

d) $(\mathcal{B}(X), \circ)$, *tj. zbiór bijekcji określonych na niepustym zbiorze X o wartościach w X, z działaniem składania odwzorowań: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, dla $x \in X$. Elementem neutralnym jest funkcja identyczność $\mathrm{id}_X : X \ni x \to x \in X$; elementem symetrycznym dla bijekcji f jest funkcja do niej odwrotna f^{-1} (również bijekcja – zob. Wykład z analizy matematycznej).*

Grupy z punktów a), b) i c) są abelowe; grupa z punktu d), w przypadku, gdy zbiór X liczy więcej niż dwa elementy, nie jest abelowa.

Niech teraz h_1 i h_2 będą dwoma działaniami wewnętrznymi w niepustym zbiorze G.

Definicja 1.6. *Strukturę (G, h_1, h_2) nazywamy* **ciałem**, *jeżeli:*

- *(G, h_1) jest grupą abelową, tj.*
  a) działanie h_1 jest łączne;
  b) działanie h_1 posiada w G element neutralny e_1;
  c) każdy element G posiada element symetryczny względem działania h_1;
  d) działanie h_1 jest przemienne;
- *$(G\setminus\{e_1\}, h_2)$ jest grupą abelową, tj.*
  e) działanie h_2 jest łączne;
  f) działanie h_2 posiada w $G\setminus\{e_1\}$ element neutralny;
  g) każdy element $G\setminus\{e_1\}$ posiada element symetryczny względem działania h_2;
  h) działanie h_2 jest przemienne;
- *działanie h_2 jest rozdzielne względem działania h_1, tzn.*

$$\forall x, y, z \in G \qquad h_2(x, h_1(y, z)) = h_1(h_2(x, y), h_2(x, z)). \tag{1.4}$$

Strukturę (G, h_1, h_2), która spełnia wszystkie warunki definicji 1.6, za wyjątkiem warunku g) nazywamy **pierścieniem**.

Zauważmy, że oznaczając działanie h_1 przez „+", a działanie h_2 przez „·", tzn.:

$$h_1(x, y) = x + y, \qquad h_2(x, y) = x \cdot y,$$

warunek (1.4) przyjmuje dobrze znaną postać:

$$\forall x, y, z \in G \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Przykład 1.4. *Niech $\pi(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych:*

$$\pi(\mathbb{R}) = \left\{x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R} \ \ (i = 0, \ldots, n)\,, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Łatwo sprawdzić, że struktura $(\pi(\mathbb{R}), +, \cdot)$, gdzie $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania i mnożenia wielomianów, jest pierścieniem; warunek g) nie jest spełniony, gdyż odwrotność wielomianu na ogół nie jest wielomianem (kiedy jest?).

Przykład 1.5. *Każda z poniższych struktur jest ciałem (ćwiczenie):*

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *gdzie $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb;*
- $(\mathbb{Q}\,[r]\,, +, \cdot)$, *gdzie $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{Q}\,[r] = \{x + ry : x, y \in \mathbb{Q}\}$, a $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb;*
- $(\mathcal{L}\,(\mathbb{R})\,, +, \circ)$, *gdzie $\mathcal{L}\,(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \ni x \to ax \in \mathbb{R} : a \in \mathbb{Q}\}$ oraz $+$ i $\circ$ to naturalne działania dodawania oraz składania funkcji.*

Przykład 1.6. *Na zakończenie wykażemy, że zbiór $\mathbb{R}^2$ z działaniami dodawania i mnożenia określonymi poniżej:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,,$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

również jest ciałem. Warunki a) oraz d) definicji 1.6 są oczywistymi konsekwen- cjami łączności oraz przemienności dodawania liczb; warunki e), g) oraz rozdzielność $\cdot$ względem $+$ sprawdzamy bezpośrednimi prostymi rachunkami. Wprost z definicji działania $+$ wynika, że $e_+ = (0, 0)$ jest jego elementem neutralnym, natomiast elementem symetrycznym (w przypadku działania oznaczanego $+$ nazywany elementem przeciwnym) dla elementu (x, y) jest $(-x, -y)$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} xe_1 - ye_2 = x \\ xe_2 + ye_1 = y \end{cases}$$

ze względu na niewiadome e_1, e_2, znajdziemy element neutralny $e_\cdot = (e_1, e_2)$ dla działania $\cdot$. Po prostych rachunkach otrzymujemy $e_\cdot = (1, 0)$. Podobnie, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x\widetilde{x} - y\widetilde{y} = 1 \\ x\widetilde{y} + y\widetilde{x} = 0 \end{cases}$$

ze względu na niewiadome $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ znajdziemy element symetryczny $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ (w przypadku działania oznaczanego $\cdot$ nazywany elementem odwrotnym) dla dowolnego niezerowego elementu (x, y). Po prostych rachunkach otrzymujemy:

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

Rozdział 2

Liczby zespolone

Zbiór $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ z działaniami $+$ oraz $\cdot$ określonymi poniżej:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \tag{2.1}$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{2.2}$$

jest ciałem (zob. przykład 1.6, str. 7); jest to tzw. **ciało liczb zespolonych**. Przypomnijmy, że elementem neutralnym dla dodawania jest $\mathbf{0} = (0, 0)$, dla mnożenia $\mathbf{1} = (1, 0)$. Elementem przeciwnym dla elementu (x, y) jest $(-x, -y)$, elementem odwrotnym dla dowolnego niezerowego elementu (x, y) jest

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Dowolny element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ możemy interpretować jako punkt (wektor) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Ponieważ

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \tag{2.3}$$

zatem, utożsamiając liczbę zespoloną $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą x oraz przyjmując oznaczenie $i = (0, 1)$, uwzględniając równość (2.3), otrzymujemy **postać kanoniczną** (dwumienną) liczby zespolonej

$$z = x + iy;$$

$x = \mathrm{Re}\,(z)$ nazywamy **częścią rzeczywistą**, $y = \mathrm{Im}\,(z)$ **częścią urojoną** liczby zespolonej z. Dwie liczby zespolone są równe, jeżeli mają równe części rzeczywiste oraz części urojone. Liczbę $i = (0, 1)$ nazywamy **jednostką urojoną**. Zauważmy, że

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Postać kanoniczna liczby zespolonej umożliwia dodawanie i mnożenie liczb zespolonych tak samo jak wielomianów, tzn. *podobny do podobnego* (w przypadku dodawania):

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

oraz *każdy przez każdy* (w przypadku mnożenia):

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = \ldots$$

i dalej, uwzględniając warunek $i^2 = -1$,

$$\ldots = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i\left(x_1 y_2 + y_1 x_2\right).$$

Porównaj te wyniki ze wzorami (2.1) oraz (2.2).

2.1. Sprzężenie, moduł oraz argument liczby zespolonej

Z każdą liczbą zespoloną $z = x + iy$ możemy stowarzyszyć liczbę zespoloną $\overline{z} = x - iy$ nazywaną **sprzężeniem** liczby z, oraz nieujemną liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nazywaną **modułem** liczby zespolonej.

2.1.1. Własności sprzężenia oraz modułu liczby zespolonej

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; wówczas:

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$, $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,(z)$;
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; ([1])
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;
- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Niech $z = x + iy$ będzie dowolną niezerową liczbą zespoloną. Wówczas

$$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = |z|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right), \tag{2.4}$$

gdzie kąt $\alpha = \arg(z)$, nazywany **argumentem** liczby zespolonej, wyznaczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{x}{|z|} \\ \sin\alpha = \frac{y}{|z|} \end{cases}.$$

Można łatwo wykazać, że w dowolnym przedziale postaci $[r, r + 2\pi)$ lub $(r, r + 2\pi]$ $(r \in \mathbb{R})$ układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, a dowolne dwa jego rozwiązania różnią się o całkowitą wielokrotność 2π. Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $(-\pi, \pi]$ nazywamy **argumentem głównym** i oznaczamy $\mathrm{Arg}\,(z)$.

Przykład 2.1. *Dla liczby* $z = 1 - i$ *mamy:* $\mathrm{Re}\,(1 - i) = 1$, $\mathrm{Im}\,(1 - i) = -1$, $|1 - i| = \sqrt{2}$. *Aby wyznaczyć argument liczby* $1 - i$ *musimy rozwiązać układ równań*

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Jego rozwiązaniem jest każda z liczb $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, *zatem* $\mathrm{Arg}\,(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$. *Ostatecznie*

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

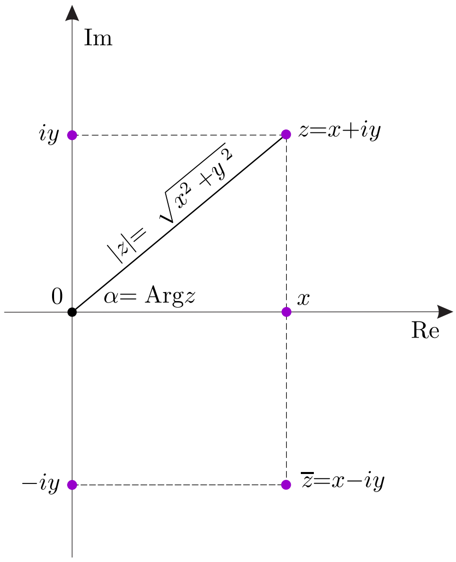
2.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Znając moduł $|z|$ oraz argument α liczby zespolonej z możemy zapisać ją w postaci

$$z = |z|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)$$

nazywanej **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej. Dwie niezerowe liczby zespolone są równe jeżeli mają równe moduły i argumenty główne (ich argumenty mogą się natomiast różnić o całkowitą wielokrotność 2π). Liczba 0 jest jedyną liczbą zespoloną jednoznacznie określoną przez jej moduł.

[1] Dzielenie przez liczbę zespoloną z rozumiemy jako mnożenie przez liczbę z^{-1}.



Wykres 1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej, jej modułu, sprzężenia oraz argumentu.

2.2.1. Mnożenie oraz dzielenie liczb zespolonych zapisanych w postaci trygonometrycznej

Niech $z_1 = |z_1| (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ oraz $z_2 = |z_2| (\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1) |z_2| (\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) \\ &= |z_1| |z_2| ((\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_2) + i (\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cos\alpha_2)) \end{aligned}$$

oraz dla $z_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1| (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)}{|z_2| (\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \frac{(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2)}{|\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2|^2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} ((\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_2) + i (\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2)) . \end{aligned}$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) &= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \mp \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \\ \sin(\alpha_1 \pm \alpha_2) &= \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \pm \sin\alpha_2 \cos\alpha_1 \end{aligned}$$

otrzymujemy prosty przepis na iloczyn oraz iloraz liczb zespolonych zapisanych w postaci trygonometrycznej:

a) $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2))$;
b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2))$, gdzie $z_2 \neq 0$.

Ze wzorów tych wynikają następujące własności argumentu iloczynu oraz argumentu ilorazu liczb zespolonych:

- $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$;
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$;

ponadto, ponieważ $\operatorname{Arg}(z \cdot \overline{z}) = 0$,

- $\arg \overline{z} = -\arg z + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

2.2.2. Wzór de Moivre'a

Ze wzoru na iloczyn liczb zespolonych wyrażonych w postaci trygonometrycznej wynika, że

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha.$$

Zależność tę można w prosty sposób uogólnić uzyskując tzw. **wzór de Moivre'a** (prosty dowód indukcyjny pozostawiam jako ćwiczenie):

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha), \qquad \text{dla } n\in\mathbb{Z}.$$

Przykład 2.2. *Aby obliczyć wartość wyrażenia*

$$w = \frac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^9}{(-1+i)^4}$$

wygodnie jest jego licznik i mianownik sprowadzić do postaci trygonometrycznej, a następnie zastosować do nich wzór de Moivre'a.
Niech $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ *oraz* $z_2 = -1 + i$. *Wówczas*

$$\begin{cases} \cos\alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \textit{oraz} \qquad \begin{cases} \cos\alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Zatem $\operatorname{Arg}(z_1) = -\frac{2}{3}\pi$ *oraz* $\operatorname{Arg}(z_2) = \frac{3}{4}\pi$. *Mamy więc:*

$$w = \frac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^9}{(-1+i)^4} = \frac{\left(2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right)^4} = \ldots$$

stosując teraz wzór de Moivre'a, otrzymujemy

$$\ldots = \frac{\left(2^9\left(\cos(-6\pi) + i\sin(-6\pi)\right)\right)}{\left(2^2\left(\cos 3\pi + i\sin 3\pi\right)\right)} = 2^7\left(\cos(-9\pi) + i\sin(-9\pi)\right) = -2^7.$$

2.3. Pierwiastek $n-$tego stopnia z liczby zespolonej

Niech $n\in\mathbb{N}$ będzie ustaloną liczbą naturalną, a $c\in\mathbb{C}$ ustaloną liczbą zespoloną. Rozważmy następujące równanie

$$z^n = c. \tag{2.5}$$

Każdą liczbę zespoloną z dla której równanie (2.5) jest prawdziwe nazywać będziemy jego rozwiązaniem. Celem naszym będzie podanie przepisu pozwalającego znajdywać (wszystkie) rozwiązania równania (2.5).

Zapiszmy szukane rozwiązanie z oraz zadaną liczbę c w postaci trygonometrycznej:

$$z = |z|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right), \qquad c = |c|\left(\cos\gamma + i\sin\gamma\right),$$

a następnie podstawmy je do równania (2.5). Po zastosowaniu wzoru de Moivre'a otrzymujemy równanie

$$|z|^n\left(\cos n\alpha + i\sin n\alpha\right) = |c|\left(\cos\gamma + i\sin\gamma\right),$$

z którego natychmiast wynika, że

$$|z|^n = |c| \quad \text{oraz} \qquad n\alpha = \gamma + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

lub równoważnie:

$$|z| = \sqrt[n]{|c|} \quad \text{oraz} \qquad \alpha = \frac{\gamma + 2k\pi}{n},\ k\in\mathbb{Z}.$$

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ to równanie $z^n = c$ posiada n różnych rozwiązań $z_0, \ldots, z_{n-1}$ postaci*

$$z_k = \sqrt[n]{|c|}\left(\cos\frac{\gamma + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\gamma + 2k\pi}{n}\right), \tag{2.6}$$

dla $k = 0, \ldots, n-1$; $\gamma \in \arg c$.

Uwaga Dla $c \in \mathbb{C}$ zapis $\sqrt[n]{c}$ oznacza zbiór (!) wszystkich liczb zespolonych, których n–ta potęga to c; jest to więc zbiór rozwiązań równania $z^n = c$, tj.

$$\sqrt[n]{c} = \{z_0, \ldots, z_{n-1}\},$$

gdzie liczby z_k określa wzór (2.6). Ten sam zapis stosuje się również do funkcji pierwiastkowej

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \ni x \to \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+.$$

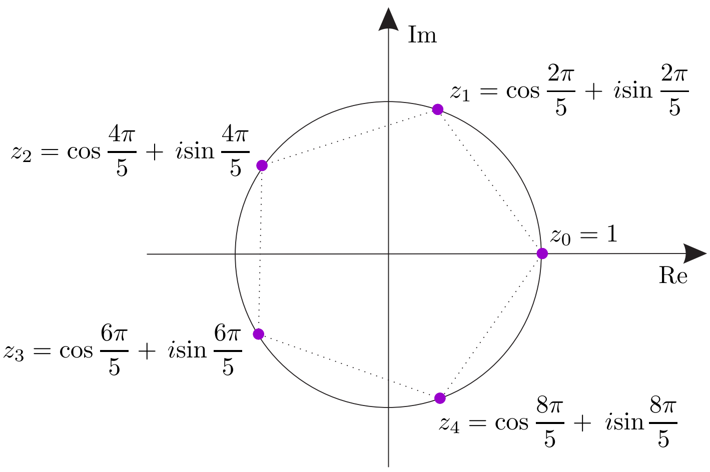
W tych dwóch przypadkach ten sam zapis ma zastosowanie do różnych obiektów: w pierwszym przypadku oznacza zbiór, w drugim liczbę.

2.3.1. Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Użytecznym przepisem na rozwiązania równania (2.5) jest również, wynikająca ze wzoru (2.6), formuła

$$z_k = z_{k-1}\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right), \quad k = 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

w której z_0 jest jednym z rozwiązań równania (2.5). Wynika z niej, że liczba zespolona (wektor płaszczyzny zespolonej) z_1 powstaje w wyniku obrotu z_0 o kąt $\frac{2\pi}{n}$; podobnie z_2 to wynik obrotu z_1 o ten sam kąt. Ogólnie, z_{k+1} powstaje z obrotu z_k o kąt $\frac{2\pi}{n}$. Innymi słowy, liczby $z_0, \ldots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = c$ stanowią wierzchołki $n-$kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu $r = \sqrt[n]{|c|}$.



Wykres 2. Interpretacja geometryczna rozwiązań równania $z^5 = 1$.

Przykład 2.3. *Rozważmy równanie* $z^3 = 1 - i$. *Aby znaleźć jego rozwiązania posłużymy się wzorem (2.6). Ponieważ* $|c| = |1 - i| = \sqrt{2}$ *oraz* $\gamma = \mathrm{Arg}\,(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ *(zob. przykład 2.1), mamy*

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$
$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right),$$
$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+4\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1-i}{\sqrt[3]{2}}.$$

Przykład 2.4. *Wykorzystując wyliczoną w poprzednim przykładzie wartość pierwiastka* z_2 *oraz stosując wzór (2.7), obliczymy jawne wartości pozostałych dwóch pierwiastków. Otrzymujemy odpowiednio:*

$$z_0 = z_2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1-i}{\sqrt[3]{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$
$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$$
$$z_1 = z_2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Przykład 2.5. *Rozważmy równanie* $z^4|z| = -\overline{z}$. *Jego rozwiązań poszukamy w postaci trygonometrycznej* $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. *Mamy:*

$$z^4|z| = r^5(\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha)$$

oraz

$$-\overline{z} = (\cos\pi + i\sin\pi)\cdot r(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) = r(\cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha)).$$

Porównując moduły oraz argumenty tych liczb otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} r^5 = r \\ 4\alpha = \pi - \alpha + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $r \in \{0, 1\}$ *oraz* $\alpha \in \left\{\pm\frac{\pi}{5}, \pm\frac{3\pi}{5}, \pi\right\}$. *Ostatecznie, rozwiązaniem wyjściowego równania są liczby*

$$\left\{-1, 0, \cos\frac{\pi}{5} \pm i\sin\frac{\pi}{5}, \cos\frac{3\pi}{5} \pm i\sin\frac{3\pi}{5}\right\}.$$

2.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej

Wychodząc od postaci trygonometrycznej liczby zespolonej

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

oraz uwzględniając wzór (którego uzasadnienie wymaga znajomości szeregów potęgowych)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (\text{dla } \alpha \in \mathbb{R})$$

otrzymujemy tzw. **postać wykładniczą liczby zespolonej**:

$$z = re^{i\alpha},$$

w której $r \geqslant 0$ to moduł, a $\alpha \in \mathbb{R}$ argument liczby zespolonej z. Dwie liczby zespolone $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ oraz $z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$ zapisane w postaci wykładniczej są równe, jeżeli mają te same moduły, a ich argumenty różnią się o całkowitą wielokrotność 2π, tj.

$$r_1 e^{i\alpha_1} = r_2 e^{i\alpha_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ oraz } \alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi.$$

Ciekawostka Zapisując liczbę -1 w postaci wykładniczej otrzymujemy zwarty wzór łączący pięć najważniejszych stałych matematycznych: 0 (element neutralny dodawania), 1 (element neutralny mnożenia), i, e oraz π

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Przez wielu, wzór ten jest uznawany za najpiękniejszy wzór matematyki.

2.5. Logarytm oraz potęgi zespolone*

Jak wynika z powyższych rozważań, dla liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Powyższe rozszerzenie definicji funkcji wykładniczej na zbiór liczb zespolonych umożliwia zdefiniowanie logarytmu dla argumentu zespolonego: dla $z, w \in \mathbb{C}$

$$\log z = w \Leftrightarrow z = e^w.$$

Dla $z \neq 0$ mamy

$$z = |z| e^{i\alpha} = e^{\ln|z|} e^{i\alpha} = e^{\ln|z| + i\alpha}$$

skąd wynika, że

$$\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcję

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

nazywamy **gałęzią główną logarytmu**.

Przykład 2.6. *Mamy*

$$\operatorname{Log}(1) = 0, \quad \operatorname{Log}(e) = 1, \quad \operatorname{Log}(-1) = i\pi, \quad \operatorname{Log}(i) = i\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Log}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}.$$

Powyższe rozszerzenie definicji logarytmu na liczby zespolone umożliwia zdefiniowanie potęg zespolonych liczb zespolonych:

$$z^w := e^{w \log z},$$

gdzie $z, w \in \mathbb{C}$ oraz $z \neq 0$.

Przykład 2.7. *Mamy*

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(\operatorname{Log} i + i2k\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \quad \textit{dla } k \in \mathbb{Z}$$

oraz

$$\begin{aligned}(-1)^{\frac{1}{2}} &= e^{\frac{1}{2}\log(-1)} = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(-1) + i2k\pi)} = e^{\frac{1}{2}(i\pi + i2k\pi)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm i.\end{aligned}$$

Rozdział 3

Wielomiany – podstawowe wiadomości

Funkcję postaci

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0, \tag{3.1}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, \ldots, n)$, $a_n \neq 0$ nazywamy **wielomianem rzeczywistym stopnia** n; jeżeli współczynniki a_i $(i = 0, \ldots, n)$ przyjmują wartości zespolone, to funkcję tę nazywamy **wielomianem zespolonym**. Stopień wielomianu f oznaczamy jako $\deg f$ (ang. degree).

3.1. Miejsca zerowe wielomianu

Każdą liczbę $s_0 \in \mathbb{C}$ dla której $f(s_0) = 0$ nazywamy **miejscem zerowym** (zerem, pierwiastkiem) wielomianu f. Łatwo wykazać, że każdy wielomian rzeczywisty nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Prawdziwe jest również, dużo trudniejsze do wykazania, następujące

Twierdzenie 3.1 (Podstawowe twierdzenie algebry, Gauss 1799).
Każdy wielomian (zespolony) dodatniego stopnia ma miejsce zerowe.

Twierdzenie to w połączeniu z poniższym twierdzeniem (tzw. twierdzeniem Bézout; nie jest ono autorstwa Bézout, ale pod taką nazwą jest znane) odgrywa kluczową rolę w wielu działach matematyki.

Twierdzenie 3.2 (Twierdzenie Bézout).
Jeżeli s_0 jest pierwiastkiem wielomianu f oraz $\deg f > 0$, to wielomian ten dzieli się bez reszty przez wielomian $s \to s - s_0$, tj.

$$f(s) = (s - s_0)\, g(s),$$

gdzie g jest pewnym wielomianem stopnia $\deg f - 1$.

Mówimy, że liczba s_0 jest pierwiastkiem k–krotnym $(k \geqslant 1)$ wielomianu f jeżeli wielomian ten jest podzielny (bez reszty) przez wielomian $s \to (s - s_0)^k$, ale nie jest podzielny przez wielomian $s \to (s - s_0)^{k+1}$. Wykorzystując pochodne, warunki te możemy równoważnie wyrazić jako

$$f(s_0) = f'(s_0) = f''(s_0) = \ldots = f^{(k-1)}(s_0) = 0, \qquad f^{(k)}(s_0) \neq 0.$$

Przykład 3.1. *Wyznaczymy te wartości parametru $a \geqslant 0$, dla których wielomian*

$$\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + (a + 27)\, x - a^2 - 3a - 27$$

ma pierwiastki wielokrotne.

Ponieważ

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 18x + a + 27 = 3(x-3)^2 + a,$$

zatem dla $a > 0$ wielomian φ, jako ciągła funkcja rosnąca spełniająca warunek

$$\varphi(x) \to -\infty \quad (x \to -\infty) \qquad \textit{oraz} \qquad \varphi(x) \to +\infty \quad (x \to +\infty)$$

posiada dokładnie jeden rzeczywisty pierwiastek; musi zatem posiadać również dwa pojedyncze pierwiastki nierzeczywiste. Z kolei, dla $a = 0$ mamy

$$\varphi(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3,$$

czyli φ posiada jeden pierwiastek $x_0 = 3$ o krotności $k = 3$.

3.1.1. Pierwiastki wielomianów o współczynnikach całkowitych

Przypuśćmy, że współczynniki wielomianu $f(s) = a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0$ są liczbami całkowitymi. Łatwo wówczas stwierdzić, że liczba całkowita $s_0 \neq 0$ jest jego pierwiastkiem wtedy i tylko wtedy, gdy

$$-s_0(a_n s_0^{n-1} + \ldots + a_2 s_0 + a_1) = a_0. \tag{3.2}$$

Ponieważ liczba $a_n s_0^{n-1} + \ldots + a_2 s_0 + a_1$ jest całkowita, zatem warunek (3.2) oznacza, że s_0 jest dzielnikiem wyrazu a_0. Wynika stąd następujące

Stwierdzenie 3.3. *Pierwiastków całkowitych wielomianu o współczynnikach całkowitych należy poszukiwać jedynie wśród dzielników jego wyrazu wolnego.*

Liczba wymierna $s_0 = \frac{m}{k}$ (zakładamy tu, że liczby m, k są nieskracalne, tj. nie posiadają nietrywialnego wspólnego dzielnika) jest pierwiastkiem f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$a_n \left(\frac{m}{k}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{m}{k}\right)^{n-1} \ldots + a_1 \frac{m}{k} + a_0 = 0,$$

lub równoważnie

$$a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} k + \ldots + a_1 m k^{n-1} + a_0 k^n = 0.$$

Wynika stąd, że

$$a_0 k^n = -m\left(a_n m^{n-1} + a_{n-1} m^{n-2} k + \ldots + a_1 k^{n-1}\right) \tag{3.3}$$

oraz

$$a_n m^n = -k(a_{n-1} m^{n-1} + \ldots + a_1 m k^{n-2} + a_0 k^{n-1}). \tag{3.4}$$

Ponieważ m nie dzieli k^n zatem z warunku (3.3) wynika, że m jest dzielnikiem a_0; podobnie z warunku (3.4) wynika, że k jest dzielnikiem a_n.

Stwierdzenie 3.4. *Jeżeli liczba $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$ $(q \neq 0)$ są liczbami nieskracalnymi, jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego, a q jest dzielnikiem współczynnika wiodącego.*

Z *Podstawowego twierdzenia algebry* oraz z *twierdzenia Bézout* wynika, że **każdy wielomian stopnia $n > 0$ ma dokładnie n pierwiastków** (licząc z krotnościami); oznaczając te pierwiastki przez $s_1, \ldots, s_n$, wielomian (3.1) możemy zapisać w postaci iloczynowej

$$f(s) = a_n (s - s_1) \cdots (s - s_n). \tag{3.5}$$

Przykład 3.2. *Rozważmy wielomian* $f(s) = s^4 + 1$. *Jego pierwiastkami są liczby*

$$s_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, s_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, s_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, s_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

postać iloczynowa wielomianu f *to*

$$f(s) = \left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(s - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right).$$

Jeżeli f jest wielomianem rzeczywistym, to dla dowolnej liczby $s \in \mathbb{C}$ mamy $\overline{f(s)} = f(\overline{s})$; oznacza to między innymi, że jeżeli liczba zespolona jest zerem wielomianu rzeczywistego, to liczba do niej sprzężona również. Z twierdzenia Bézout wynika więc, że jeżeli s_0 jest zespolonym nierzeczywistym pierwiastkiem wielomianu f to wielomian ten dzieli się bez reszty przez trójamian kwadratowy $(s - s_0)(s - \overline{s_0}) = s^2 - 2\operatorname{Re}(s_0)s + |s_0|^2$:

$$f(s) = \left(s^2 - 2\operatorname{Re}(s_0)s + |s_0|^2\right)g(s),$$

gdzie g jest pewnym wielomianem, takim że $\deg g = \deg f - 2$.

W przypadku gdy wielomian (3.1) jest rzeczywisty, każde dwa czynniki jego rozkładu (3.5) zawierające pierwiastki parami sprzężone, tj. $s - s_i$ oraz $s - \overline{s_i}$, mogą zostać wymnożone. Otrzymamy wówczas rozkład dowolnego wielomianu rzeczywistego na iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia pierwszego oraz trójmianów kwadratowych nierozkładalnych (tzn. o ujemnym wyróżniku):

$$f(s) = a_n(s - s_1)^{l_1} \cdots (s - s_m)^{l_m}\left(s^2 + \alpha_1 s + \beta_1\right)^{k_1} \cdots \left(s^2 + \alpha_r s + \beta_r\right)^{k_r},$$

gdzie $s_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, m)$; $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, r)$; $\deg f = l_1 + \ldots + l_m + 2(k_1 + \ldots + k_r)$.

Przykład 3.3. *Rozważmy ponownie wielomian* $f(s) = s^4 + 1$. *Rozkład tego wielomianu na iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej dwa uzyskamy z jego postaci iloczynowej:*

$$\begin{aligned} f(s) &= s^4 + 1 \\ &= \left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(s + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(s - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(s - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= \left(s^2 + \sqrt{2}s + 1\right)\left(s^2 - \sqrt{2}s + 1\right). \end{aligned}$$

3.2. Wzory Viète'a

Niech f będzie wielomianem (rzeczywistym lub zespolonym) stopnia $n > 0$ postaci

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = a_n(s - s_1)\cdots(s - s_n).$$

Poniższe wzory Viète'a ustalają związki pomiędzy współczynnikami wielomianu f, a jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1} + s_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \\ s_1 s_2 + \cdots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \cdots + s_2 s_n + \cdots + s_{n-1}s_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ s_1 s_2 \cdots s_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}.$$

Przykład 3.4. *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ xy-xz-yz=1 \\ xyz=1 \end{cases}.$$

Wprowadzając pomocniczą niewiadomą $w=-z$ otrzymujemy układ równoważny postaci

$$\begin{cases} x+y+w=-1 \\ xy+xw+yw=1 \\ xyw=-1 \end{cases},$$

którego rozwiązaniami, na podstawie wzorów Viète'a, są pierwiastki wielomianu $s \to s^3+s^2+s+1$. Ponieważ

$$s^3+s^2+s+1=s^2(s+1)+s+1=\left(s^2+1\right)(s+1)=(s+i)(s-i)(s+1),$$

zatem poszukiwaną trójką rozwiązań (x,y,w) jest każdy z elementów:

$$(-1,i,-i),(-1,-i,i),(i,-i,-1),(-i,i,-1),(i,-1,-i),(-i,-1,i).$$

Uwzględniając, że $z=-w$, rozwiązania (x,y,z) wyjściowego układu tworzą poniższe trójki:

$$(-1,i,i),(-1,-i,-i),(i,-i,1),(-i,i,1),(i,-1,i),(-i,-1,-i).$$

3.3. Równania algebraiczne

Równanie postaci

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_{0,}=0, \quad a_n\neq 0 \tag{3.6}$$

nazywamy **równaniem algebraicznym stopnia n**. Zauważmy, że równanie (3.6) jest uogólnieniem równania $z^n=c$, którego rozwiązanie było treścią poprzedniego wykłady (zob. podrozdział 2.3). Ponieważ lewą stronę równania (3.6) można sprowadzić do postaci iloczynowej (3.5), wnioskujemy, że równanie (3.6) ma n rozwiązań (liczonych z krotnościami).

3.3.1. Równania algebraiczne stopnia pierwszego

Dla $n=1$ jedynym rozwiązaniem równania (3.6) jest $x_0=-\frac{a_0}{a_1}$.

3.3.2. Równania algebraiczne stopnia drugiego

Dla $n=2$ lewą stronę rówanania (3.6) możemy sprowadzić do postaci kanonicznej

$$a_2x^2+a_1x+a_0=a_2\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2-\frac{a_1^2}{4a_2}+a_0=a_2\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2-\frac{a_1^2-4a_2a_0}{4a_2}.$$

W przypadku, gdy wyróżnik $\triangle=a_1^2-4a_2a_0$ jest rzeczywisty i nieujemny, rozwiązania równania (3.6) możemy wyrazić w postaci

$$x_1=\frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2}, \qquad x_2=\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_2a_0}}{2a_2}.$$

Jeżeli wyróżnik $\triangle=a_1^2-4a_2a_0$ jest ujemny rozwiązania te przyjmują postać

$$x_1=\frac{-a_1-i\sqrt{4a_2a_0-a_1^2}}{2a_2}, \qquad x_2=\frac{-a_1+i\sqrt{4a_2a_0-a_1^2}}{2a_2}.$$

W ogólnym przypadku, przyjmując $\sqrt{\triangle}=\{\delta,-\delta\}$ mamy

$$x_1=\frac{-a_1-\delta}{2a_2}, \qquad x_2=\frac{-a_1+\delta}{2a_2}.$$

3.3.3. Równania algebraiczne stopnia trzeciego

Aby uzyskać ogólne wzory na rozwiązania równania algebraicznego stopnia trzeciego wygodnie jest przyjąć, nie tracąc ogólności, że $a_3 = 1$:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{3.7}$$

Dokonując podstawienia $x = y - \frac{a_2}{3}$ równanie (3.7) przekształcamy do postaci

$$\begin{aligned} 0 &= \left(y - \frac{a_2}{3}\right)^3 + a_2\left(y - \frac{a_2}{3}\right)^2 + a_1\left(y - \frac{a_2}{3}\right) + a_0 \\ &= y^3 + \frac{3a_1 - a_2^2}{3}y - \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{27}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Przyjmując $p = \frac{3a_1 - a_2^2}{3}, q = \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{27}$ otrzymujemy równanie

$$y^3 + yp - q = 0, \tag{3.9}$$

które, po dokonaniu kolejnego podstawienia $y = z - \frac{p}{3z}$, prowadzi do równania

$$\left(z^3\right)^2 - qz^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0,$$

które jest równaniem algebraicznym stopnia drugiego względem niewiadomej $w = z^3$

$$w^2 - qw - \frac{1}{27}p^3 = 0.$$

Równanie to potrafimy już rozwiązać uzyskując poszukiwane rozwiązania dowolnego równania algebraicznego stopnia trzeciego – tzw. wzory Cardano.

Przykład 3.5. *Wyznaczymy pierwiastki wielomianu $f(x) = x^3 - 6x^2 + 18x - 18$. Dokonując podstawienia $x = y + 2$ otrzymujemy*

$$\begin{aligned} 0 &= f(y+2) = (y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 18(y+2) - 18 \\ &= y^3 + 6y + 2. \end{aligned}$$

Ponieważ $p = 6$, $q = -2$, zatem wprowadzając kolejną zamianę zmiennych $y = z - \frac{2}{z}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \left(z - \frac{2}{z}\right)^3 + 6\left(z - \frac{2}{z}\right) + 2 = z^3 - \frac{8}{z^3} + 2 \\ &= z^{-3}\left(z^6 + 2z^3 - 8\right). \end{aligned}$$

Oznacza to, że pierwiastki wyjściowego wielomianu znajdziemy wyznaczając zera wielomianu $z \to z^6 + 2z^3 - 8$. Podstawiając $w = z^3$ otrzymujemy

$$0 = w^2 + 2w - 8 = (w+1)^2 - 9 = (w-2)(w+4),$$

skąd

$$z^3 - 2 = 0 \qquad \vee \qquad z^3 + 4 = 0.$$

Mamy kolejno

$$\begin{aligned} 0 = z^3 - 2 &= \left(z - \sqrt[3]{2}\right)\left(z^2 + \sqrt[3]{2}z + \sqrt[3]{4}\right) \\ &= \left(z - \sqrt[3]{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{4}}\right)\left(z + \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{4}}\right) \\ 0 = z^3 + 4 &= \left(z + \sqrt[3]{4}\right)\left(z^2 - \sqrt[3]{4}z + \sqrt[3]{16}\right) \\ &= \left(z + \sqrt[3]{4}\right)\left(z - \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} - i\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{16}}\right)\left(z - \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} + i\frac{1}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{16}}\right). \end{aligned}$$

Dla każdego z sześciu wyznaczonych powyżej pierwiastków z wyliczamy kolejno wartości $y = z - \frac{2}{z}$, a następnie $x = y + 2$. Otrzymujemy sześć pierwiastków

$$x_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2, \quad x_{2,3} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + 2 \pm i\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\sqrt{3}\right),$$

$$x_4 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 2, \quad x_{5,6} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} + 2 \pm i\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\sqrt{3}\right).$$

Zauważmy na koniec, że pierwiastki x_1, x_2, x_3 równe są odpowienio pierwiastkom x_4, x_5, x_6. Ponieważ wyjściowy wielomian był stopnia trzeciego więc jego trzy różne zera to x_1, x_2, x_3.

3.3.4. Równania algebraiczne stopnia czwartego

Przyjmijmy, nie tracąc ogólności, że $a_4 = 1$, tj.

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \tag{3.10}$$

Dokonując podstawienia $x = y - \frac{a_3}{4}$ równanie (3.10) przekształcamy do postaci zredukowanej

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \tag{3.11}$$

gdzie

$$\begin{aligned} p &= a_2 - \frac{3}{8}a_3^2, \\ q &= \frac{1}{8}a_3^3 - \frac{1}{2}a_2a_3 + a_1, \\ r &= -\frac{3}{256}a_3^4 + \frac{1}{16}a_2a_3^2 - \frac{1}{4}a_1a_3 + a_0. \end{aligned}$$

Równanie (3.11) przepisujemy w postaci równoważnej

$$y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 - qy - r + p^2,$$

a następnie

$$\left(y^2 + p\right)^2 = py^2 - qy - r + p^2.$$

Stąd, dla dowolnego y_0, mamy

$$\begin{aligned} \left(y^2 + p + y_0\right)^2 &= \left(y^2 + p\right)^2 + 2y_0\left(y^2 + p\right) + y_0^2 \\ &= py^2 - qy - r + p^2 + 2y_0\left(y^2 + p\right) + y_0^2 \\ &= \left(p + 2y_0\right)y^2 - qy + \left(p^2 - r + 2py_0 + y_0^2\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dobierzmy teraz y_0 w ten sposób, aby wielomian

$$y \to \left(p + 2y_0\right)y^2 - qy + \left(p^2 - r + 2py_0 + y_0^2\right)$$

posiadał jeden pierwiastek podwójny, tj. aby

$$\triangle\left(y_0\right) = q^2 - 4\left(p + 2y_0\right)\left(p^2 - r + 2py_0 + y_0^2\right) = 0. \tag{3.13}$$

Równanie (3.13) jest równaniem stopnia trzeciego, które potrafimy już rozwiązać otrzymując poszukiwaną wartość y_0. Dla tej wartości, równanie (3.12) przyjmuje postać

$$\left(y^2 + p + y_0\right)^2 = \left(p + 2y_0\right)\left(y - \frac{q}{2\left(p + 2y_0\right)}\right)^2,$$

z którą umiemy sobie już poradzić.

Ogólne wzory (uzyskane przez Ferrari, opublikowane przez Cardano w *Artis Magnae*[1] w 1545 r.) pozwalające wyznaczać analityczną postać dowolnego równania stopnia czwartego są bardzo złożone.

[1] Dzieło to, obok dzieła M. Kopernika *De revolutionibus orbium coelestium* oraz A. Wezaliusza *De humani corporis fabrica* uznawane jest za najważniejsze dzieło naukowe doby renesansu.

3.3.5. Równania algebraiczne stopnia $n \geqslant 5$

Dla równań algebraicznych stopnia $n \geqslant 5$ wykazano, że podanie ogólnych wzorów na ich rozwiązania wykorzystujących wyłącznie działania dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz pierwiastkowanie nie jest możliwe (prace Abela, Ruffiniego, Galois'a).

Ciekawostka Liczba będąca rozwiązaniem równania algebraicznego o całkowitych współczynnikach nazywana jest **liczbą algebraiczną.** Na przykład $\sqrt[3]{2}$, jako rozwiązanie równania $s^3-2=0$, jest liczbą algebraiczną; z kolei liczby π, e czy $2^{\sqrt{2}}$ nie są liczbami algebraicznymi (dowody ich niealgebraiczności są bardzo trudne). Zbiór wszystkich liczb algebraicznych (jest ich przeliczalnie wiele), z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb, tworzy ciało.

Rozdział 4

Przestrzenie liniowe

Niech X będzie zbiorem niepustym.

Definicja 4.1. *Trójkę* $(X, +, \bullet)$ *nazywamy* **rzeczywistą przestrzenią wektorową** *(liniową) jeżeli:*

(a) $+ : X \times X \to X$ *jest działaniem wewnętrznym w* X*, takim że struktura* $(X, +)$ *jest grupą abelową;*
(b) $\bullet : \mathbb{R} \times X \to X$ *jest działaniem zewnętrznym w* X*, takim że równości:*
- $\alpha \bullet (x + y) = (\alpha \bullet x) + (\alpha \bullet y)\,;$
- $(\alpha + \beta) \bullet x = (\alpha \bullet x) + (\beta \bullet x)\,;$
- $\alpha \bullet (\beta \bullet x) = (\alpha\beta) \bullet x;$
- $1 \bullet x = x$

zachodzą dla dowolnych $x, y \in X$ *oraz* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Elementy przestrzeni wektorowej nazywamy **wektorami**; elementy ciała nazywamy **skalarami**.

Przykład 4.1. *Każda z poniższych struktur jest rzeczywistą przestrzenią wektorową:*

a) $(\mathbb{R}^n, +, \bullet)$ *z naturalnymi działaniami dodawania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę:*

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \overset{df}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\,,$$
$$\alpha \bullet (x_1, \dots, x_n) \overset{df}{=} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)\,;$$

b) $(\mathbb{C}, +, \bullet)$ *z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb;*
c) $(\mathcal{F}(A, \mathbb{R}), +, \bullet)$ *z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę.*

Przykład 4.2. *Poniższe struktury nie są przestrzeniami wektorowymi:*

a) $(\mathbb{R}^n, +, \bullet)$ *z działaniami:*

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)\,,$$
$$\alpha \bullet (x_1, \dots, x_n) := (\alpha x_1, 0, \dots, 0)\,;$$

b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(0) = 1\}$ *z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę.*

Łatwo wykazać, że w dowolnej rzeczywistej przestrzeni wektorowej $(X, +, \bullet)$ prawdziwe są następujące zależności:

– $0 \bullet x = \alpha \bullet 0 = 0$;
– $\alpha \bullet x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ lub $x = 0$;
– $-(\alpha \bullet x) = (-\alpha) \bullet x = \alpha \bullet (-x)$

dla dowolnych $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Uwaga W powyższych warunkach występują dwa różne zera – jedno to element neutralny dla dodawania w grupie $(X, +)$, drugie to element neutralny dla dodawania w grupie $(\mathbb{R}, +)$. Podobnie, znaki „–" występujące w ostatnim warunku to dwa różne minusy – pierwszy oznacza element przeciwny dla elementu grupy $(X, +)$, drugi wskazuje element przeciwny w grupie $(\mathbb{R}, +)$.

4.1. Podprzestrzeń liniowa

Niech $(X, +, \bullet)$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową oraz niech $Y \subset X$.

Definicja 4.2. *Jeżeli zbiór Y oraz działania $+$ i $\bullet$ przestrzeni X spełniają warunki:*

(a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x, y \in Y \Rightarrow \alpha \bullet x + \beta \bullet y \in Y$;
(b) $0 \in Y$

to trójkę $(Y, +, \bullet)$ nazywamy **podprzestrzenią liniową** *przestrzeni $(X, +, \bullet)$.*

Łatwo pokazać, że każda podprzestrzeń liniowa Y przestrzeni liniowej X jest przestrzenią liniową z działaniami indukowanymi z przestrzeni X.

Przykład 4.3. *Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ będą dowolnymi ustalonymi liczbami. Zbiór*

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 \right\}$$

z naturalnymi działaniami dodawania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej z przykładu 4.1.a.

Przykład 4.4. *Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0\}$ z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb zespolonych jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej z przykładu 4.1.b.*

Przykład 4.5. *Zbiór $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x\ f(x) = f(-x)\}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej z przykładu 4.1.c (dla $A = \mathbb{R}$).*

Bezpośrednio z definicji wynika, że zbiór pusty tworzy przestrzeń liniową, ale nie jest on podprzestrzenią liniową żadnej przestrzeni.

Przykład 4.6. *Niech $(X, +, \bullet)$ będzie niepustą przestrzenią liniową. Wówczas struktura $(\{0\}, +, \bullet)$ jest najmniejszą (w sensie inkluzji) podprzestrzenią liniową przestrzeni $(X, +, \bullet)$.*

4.2. Liniowa niezależność wektorów

Niech $(X, +, \bullet)$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową.

Definicja 4.3. *Mówimy, że wektory $v_1, \dots, v_n \in X$ są* **liniowo niezależne***, jeżeli dla dowolnych skalarów $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ zachodzi:*

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0. \tag{4.1}$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne są **liniowo zależne***.*

Wyrażenie

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, \ldots, v_n$. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni wektorowej X, tj. zbiór

$$\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\} \overset{df}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \ \ (i = 1, \ldots, n) \right\}$$

tworzy podprzestrzeń liniową przestrzeni X (ćwiczenie).

Zauważmy, że zaprzeczenie warunku (4.1), tj. liniowa zależność wektorów $v_1, \ldots, v_n$, oznacza, że przynajmniej jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych.

Przykład 4.7. *Aby sprawdzić liniową zależność wektorów*

$$v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (-1, 1, 1), v_3 = (3, -1, -3)$$

należy rozwiązać, wynikające z warunku (4.1), równanie

$$\alpha_1 (1, 0, -1) + \alpha_2 (-1, 1, 1) + \alpha_3 (3, -1, -3) = (0, 0, 0)$$

ze względu na niewiadome $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. *Równanie to prowadzi do układu równań*

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest: $\alpha_1 = -2t$, $\alpha_2 = \alpha_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$. *Oznacza to, że warunek (4.1) nie jest spełniony, czyli badane wektory są liniowo zależne. Faktycznie, z postaci rozwiązania wynika, że* $v_2 = 2v_1 - v_3$.

4.3. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Niech $v_1, \ldots, v_n$ będą ustalonymi wektorami rzeczywistej przestrzeni wektorowej X. Jeżeli każdy element przestrzeni X można wyrazić jako kombinację liniową wektorów $v_1, \ldots, v_n$, tzn. dla dowolnego $y \in X$

$$y = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n, \tag{4.2}$$

dla pewnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, to mówimy, że wektory $v_1, \ldots, v_n$ **generują** przestrzeń X. Każdy liniowo niezależny ciąg (istotna kolejność) wektorów przestrzeni wektorowej X generujący tę przestrzeń nazywamy jej **bazą**. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej X oznaczamy $\dim X$ i nazywamy **wymiarem** przestrzeni wektorowej. Współczynniki $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ występujące w równaniu (4.2) nazywamy **współrzędnymi wektora** y w bazie $v_1, \ldots, v_n$. Niezwykle ważne jest to, że współrzędne te są wyznaczone w sposób jednoznaczny. Aby to wykazać przypuśćmy, że wektor y postaci (4.2) można również zapisać jako

$$y = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n. \tag{4.3}$$

Pokażemy, że wówczas $\alpha_i = \beta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Z zależności (4.2)-(4.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n - (\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) \\ &= (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n. \end{aligned}$$

Liniowa niezależność wektorów $v_1, \ldots, v_n$ prowadzi do warunków $\alpha_i - \beta_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Własności bazy przestrzeni wektorowej:

(i) *Każda niepusta przestrzeń wektorowa posiada bazę.*

(ii) *Jeżeli wektory $v_1, \ldots, v_n$ są bazą pewnej przestrzeni liniowej, to dla dowolnych niezerowych skalarów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ wektory $\alpha_1 v_1, \ldots, \alpha_n v_n$ również są bazę tej przestrzeni.*

(iii) *Wszystkie bazy tej samej przestrzeni wektorowej są równoliczne.*

(iv) *Wektory $v_1, \ldots, v_n$ $n-$wymiarowej przestrzeni liniowej są jej bazą wtedy i tylko wtedy, gdy są wektorami liniowo niezależnymi.*

(v) *Każdy ciąg wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej może być rozszerzony do jej bazy.*

Przykład 4.8. *Rozważmy rzeczywistą przestrzeń liniową $(\mathbb{R}^n, +, \bullet)$. Dla dowolnego wektora $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mamy:*

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_n) &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, x_n) \\ &= x_1 (1, 0, \ldots, 0) + x_2 (0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n (0, \ldots, 0, 1),\end{aligned}$$

zatem wektory $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^n$; ponieważ wektory te są również liniowo niezależne, więc stanowią one bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$– jest to tzw. **baza kanoniczna**. *Wniosek:* $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Przykład 4.9. *Rozważmy rzeczywistą przestrzeń liniową $(\mathbb{C}, +, \bullet)$. Z postaci kanonicznej liczby zespolonej wynika, że każda liczba zespolona jest kombinacją liniową wektorów $1, i$; wektory te są liniowo niezależne, więc stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{C}$. Wniosek:* $\dim \mathbb{C} = 2$.

Przykład 4.10. *Niech*

$$Y = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x + y + z = 0 \right\}.$$

Łatwo wykazać, że Y jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$; wyznaczmy więc jej bazę. Rozwiązując układ równań wynikający z definicji przestrzeni Y, otrzymamy: $x = t, y = -t, z = 0$ $(t \in \mathbb{R})$. Dowolny element przestrzeni Y ma więc postać: $(t, -t, 0) = t(1, -1, 0)$. Oznacza to, że Y jest jednowymiarową podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której bazą jest wektor $(1, -1, 0)$.

Przykład 4.11. *Niech $\pi_n(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż n. Łatwo sprawdzić, że struktura $(\pi_n(\mathbb{R}), +, \bullet)$, gdzie $+$ oraz $\bullet$ to naturalne działania dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę, jest rzeczywistą przestrzenią wektorową. Bazę tej przestrzeni tworzą jednomiany*

$$x \to 1, \quad x \to x, \quad x \to x^2, \quad \ldots \quad x \to x^n;$$

mamy więc: $\dim \pi_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Niech teraz, dla $a \in \mathbb{R}$,

$$\pi_n(\mathbb{R}; a) = \{ w \in \pi_n(\mathbb{R}) : w(a) = 0 \}.$$

Łatwo wykazać, że $\pi_n(\mathbb{R}; a)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\pi_n(\mathbb{R})$. Z twierdzenia Bézout wynika, że dowolny element $w \in \pi_n(\mathbb{R}; a)$ można zapisać w postaci

$$w(x) = (x - a)\, g(x), \tag{4.4}$$

dla pewnego $g \in \pi_{n-1}(\mathbb{R})$. Ponieważ bazą $\pi_{n-1}(\mathbb{R})$ są jednomiany $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, zatem na podstawie (4.4), wielomian w jest kombinacją liniową wielomianów

$$x \to x - a, \quad x \to x(x - a), \quad x \to x^2(x - a), \quad \ldots \quad x \to x^{n-1}(x - a);$$

Wielomiany te są liniowo niezależne, zatem stanowią bazę przestrzeni $\pi_n(\mathbb{R}; a)$; stąd $\dim \pi_n(\mathbb{R}; a) = n$.

Ćwiczenie Wyznacz bazę przestrzeni $\pi_n(\mathbb{R}; a)$ w przypadku, gdy $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Rozdział 5

Macierze

Funkcję, która każdej parze liczb naturalnych (i, j) $(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $a_{ij} \in \mathbb{F}$, gdzie $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, nazywamy **macierzą** (rzeczywistą, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, zespoloną w drugim przypadku). Macierze zapisujemy w postaci prostokątnych tablic:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}; \tag{5.1}$$

będziemy też stosować uproszczoną notację $A = [a_{ij}]_{n \times m}$. Macierz (5.1) to macierz wymiaru $n \times m$ – ma ona n wierszy (poziome) i m kolumn (pionowe). Zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach z ciała $\mathbb{F}$ będziemy oznaczać $\mathbb{F}^{n \times m}$. Jeżeli $m = n$ to macierz nazywamy **macierzą kwadratową stopnia n**. **Macierz zerowa** to macierz złożona z samych zer: $\mathbf{0} = [0]_{n \times m}$. Macierz kwadratowa, której wszystkie elementy – za wyjątkiem być może tych stojących na przekątnej – są równe zero nazywamy **macierzą diagonalną**:

$$\operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz diagonalną z jedynkami na przekątnej nazywamy **macierzą jednostkową** (ozn. I lub I_n, aby podkreślić, że jest to macierz wymiaru $n \times n$):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli wszystkie elementy macierzy kwadratowej stojące pod (nad) przekątną są równe zero to macierz tę nazywamy macierzą **trójkątną górną (trójkątną dolną)**. Macierze diagonalne są jednocześnie trójkątne górne i trójkątne dolne.

5.1. Działania na macierzach

5.1.1. Dodawanie macierzy oraz mnożenie macierzy przez skalar

W zbiorze macierzy $\mathbb{F}^{n\times m}$ wprowadza się naturalne działania dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar:

- jeżeli $A = [a_{ij}]_{n\times m}$, $B = [b_{ij}]_{n\times m}$ to $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n\times m}$;
- dla $\alpha \in \mathbb{F}$: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{n\times m}$.

Przykład 5.1. *Mamy*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zbiór macierzy prostokątnych ustalonego wymiaru (możemy dodawać tylko te macierze, które mają ten sam wymiar) z działaniami zdefiniowanymi powyżej jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.

5.1.2. Mnożenie macierzy

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times k}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{k\times m}$. Możemy wówczas zdefiniować macierz $C = [c_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times m}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}, \qquad (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m) \tag{5.2}$$

będącą iloczynem macierzy A i B; ozn. $C = AB$.

Uwaga Aby można było wyznaczyć macierz AB, liczba kolumn macierzy A musi być równa liczbie wierszy macierzy B.

Przykład 5.2. *Mamy:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 0\cdot(-1) & 2\cdot(-2) + 3\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + (-2)\cdot 1 & 1\cdot 3 + (-2)\cdot(-2) & 1\cdot 0 + (-2)\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot 1 & 2\cdot 3 + 0\cdot(-2) & 2\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ -1\cdot 2 + 1\cdot 1 & -1\cdot 3 + 1\cdot(-2) & -1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Własności iloczynu macierzy:

Zakładamy, że wymiary macierzy A, B, C występujących w poniższych warunkach są takie, że wszystkie wyrażenia mają sens.

(i) *Działanie określone wzorem (5.2) jest:*
- *łączne:* $A\,(BC) = (AB)\,C$;
- *rozdzielne względem dodawania:* $A\,(B + C) = AB + AC$;
- *posiada element neutralny – jest nim macierz jednostkowa;*

(ii) *Na ogół:* $AB \neq BA$;
(iii) $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ *lub* $B = 0$;
(iv) $AB = AC, A \neq 0 \not\Rightarrow B = C$.

Ćwiczenie Do punktów (ii)–(iv) podać stosowne przykłady.

5.1.3. Macierz transponowana

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times m}$ będzie dowolną macierzą. Macierz $A^T \in \mathbb{F}^{m\times n}$, gdzie

$$A^T = [a_{ij}]^T \stackrel{df}{=} [a_{ji}]\,,$$

nazywamy **macierzą transponowaną**. Kolumny (wiersze) macierzy A są więc wierszami (kolumnami) macierzy A^T.

Własności operacji transponowania macierzy:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, dla $\alpha \in \mathbb{F}$;
- $(AB)^T = B^T A^T$, gdzie $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

5.1.4. Macierz sprzężona

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times m}$ będzie dowolną macierzą. Macierz $A^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ określoną wzorem

$$A^* = [a_{ij}]^* \stackrel{df}{=} [\overline{a_{ji}}]\,,$$

nazywamy **macierzą sprzężoną**.

Własności operacji sprzężenia macierzy:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$;
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, dla $\alpha \in \mathbb{C}$;
- $(AB)^* = B^* A^*$, gdzie $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

Przykład 5.3. *Dla macierzy*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{oraz} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 2-i & -1 \end{pmatrix}$$

mamy

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \textit{oraz} \quad B^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1-i & 2 & 2+i \\ -i & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.2. Wyznacznik macierzy

5.2.1. Definicja aksjomatyczna

Niech $\mathbb{F}^{n\times n}$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definicja 5.1. *Funkcję* $\det : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ *spełniającą warunki:*

(i) *dla macierzy kwadratowej* $A = [a_{ij}] = [A_1, \ldots, A_n]$, *gdzie* A_i *oznacza* $i-$*tą kolumnę* A, *przekształcenie* $A_i \to \det[A_1, \ldots, A_n]$ $(i = 1, \ldots, n)$ *jest liniowe, tzn. dla* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$*:*

$$\det[A_1, \ldots, \alpha A_i + \beta B_i, \ldots, A_n] = \alpha \det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n] + \beta \det[A_1, \ldots, B_i, \ldots, A_n];$$

(ii) $\det$ *jest funkcją alternującą, tzn. dla* $A_i = A_j$ *(dla wszystkich* $i \neq j$*):*

$$\det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n] = 0,$$

(iii) $\det(I) = 1$

nazywamy **wyznacznikiem**.

Z powyższej definicji wynika natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 5.1. *Jeżeli w macierzy kwadratowej zamienimy miejscami dwie kolumny (wiersze), to jej wyznacznik zmieni znak na przeciwny.*

Dowód: Rozważmy macierz powstałą z macierzy A przez dodanie do jej i–tej oraz j–tej kolumny odpowiednio kolumny j–tej oraz i–tej:

$$[\ldots, A_i + A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots].$$

Z warunku (ii) powyższej definicji wynika

$$\det[\ldots, A_i + A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots] = 0.$$

Dodatkowo, z warunków (i) oraz (ii):

$$\begin{aligned}
0 &= \det[\ldots, A_i + A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots] \\
&= \det[\ldots, A_i, \ldots, A_i + A_j, \ldots] + \det[\ldots, A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots] \\
&= \det[\ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots] + \det[\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots] + \\
&\quad + \det[\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots] + \det[\ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots] \\
&= \det[\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots] + \det[\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots],
\end{aligned}$$

skąd ostatecznie wynika

$$\det[\ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots] = -\det[\ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots].$$

■

Przykład 5.4. *Rozważmy macierz* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie definicji 5.1 mamy

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}& \\
=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +& \\
+ 2\left(2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) +& \\
- \left(2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)& \\
=2\left(-2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) +& \\
- 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} +& \\
+ 4\left(-2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) +& \\
+ 2\left(-2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right) +& \\
- 2\left(-2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right) +& \\
- \left(-2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right)& \\
= - 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}& \\
=2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.&
\end{aligned}$$

Kolumny macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ są elementami przestrzeni $\mathbb{F}^n$; możemy więc wyrazić je jako kombinacje liniowe wektorów bazy kononicznej $e_1, \ldots, e_n$:

$$A_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left[\sum_{k_1=1}^{n} a_{k_1 1} e_{k_1}, \ldots, \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_n n} e_{k_n} \right] \overset{(i)}{=} \sum_{k_1=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} a_{k_1 1} \ldots a_{k_n n} \det \left[e_{k_1}, \ldots, e_{k_n} \right] \\ &\overset{(ii)-(iii)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}, \end{aligned}$$

gdzie S_n to zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, \ldots, n\}$; $\operatorname{sgn}(\sigma)$ to znak permutacji σ ([1]).

Twierdzenie 5.2. *Istnieje dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki (i)–(iii) definicji 5.1; funkcja ta określona jest wzorem*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}. \tag{5.3}$$

Zauważmy, że jeżeli dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n\} : \sigma(i) < i$, to dla pewnego $j \in \{1, \ldots, n\} : \sigma(j) > j$. Stąd oraz ze wzoru (5.3) wynika następujący

Wniosek 5.3. *Wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów z przekątnej.*

Własności wyznacznika macierzy

Dla dowolnych $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\alpha \in \mathbb{F}$ zachodzi

- $\det A = \det A^T$;
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$;
- *jeżeli do któregoś wiersza (kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (kolumn) to wyznacznik się nie zmieni;*
- *zamiana kolejności dwóch wierszy (kolumn) zmienia znak wyznacznika na przeciwny.*

5.2.2. Metoda Laplace'a

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie dowolną macierzą kwadratową stopnia n.

Definicja 5.2. **Minorem** *elementu a_{ij} macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy wyznacznik M_{ij} macierzy kwadratowej stopnia $n-1$ utworzonej z macierzy A przez usunięcie z niej i–tego wiersza oraz j–tej kolumny. Liczbę $(-1)^{i+j} M_{ij}$ nazywamy* **dopełnieniem algebraicznym** *elementu a_{ij}.*

Twierdzenie 5.4 (Laplace). *Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia $n \geqslant 2$:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \textit{dla każdego } j = 1, \ldots, n$$

oraz

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \textit{dla każdego } i = 1, \ldots, n.$$

[1] $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^s$, gdzie s to liczba transpozycji (transpozycja to zamiana kolejności dwóch elementów) tworzących permutację σ.

Przykład 5.5. *Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$, ze wzoru (5.3) otrzymujemy:*

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Przykład 5.6. *Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{3\times 3}$ zastosujemy metodę Laplace'a (do pierwszej kolumny). Mamy*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.$$

Ten sam wynik uzyskamy stosując tzw. **schemat Sarrusa***:*

$$\begin{array}{c|ccc|cc} & + & + & & & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & & \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ciekawostka Stosując do macierzy kwadratowej stopnia n metodę Laplace'a obliczania wyznacznika, musimy obliczyć n wyznaczników macierzy stopnia $n-1$; każdy z tych wyznaczników wymaga z kolei obliczenia $n-1$ wyznaczników stopnia $n-2$, itd. Obliczenie wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia n wymaga więc obliczenia $\frac{1}{2}n!$ wyznaczników macierzy kwadratowych stopnia 2; dla macierzy stopnia $n = 20$ daje to ponad 10^{18} wyznaczników 2×2. Superkomputer wykonujący 10^{15} operacji zmiennopozycyjnych na sekundę potrzebowałby na obliczenie tego wyznacznika 50 minut. Z kolei, sięgając po przedstawioną poniżej metodę przekształceń elementarnych obliczymy ten wyznacznik w czasie $10^{-11}s$. **Dla dużych n metoda Laplace'a jest więc wysoce niepraktyczna**.

5.2.3. Metoda przekształceń elementarnych

Metoda przekształceń elementarnych obliczania wyznacznika polega na przekształceniu danej macierzy do postaci trójkątnej. W przekształceniu tym wykorzystujemy jedynie tzw. **operacje elementarne** na wierszach macierzy:

- dodawanie do wybranego wiersza kombinacji liniowej pozostałych wierszy;
- zamiana kolejności wierszy.

Przykład 5.7. *Mamy:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 - \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \to w_3 - w_1 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 + 10w_2 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 35 \end{vmatrix} = 35.$$

Metoda przekształceń elementarnych jest jedną z najbardziej efektywnych metod obliczania wyznaczników macierzy. Jej numerycznie akceptowalna wersja wymaga wykonania tylko $O(n^3)$ operacji arytmetycznych!

5.3. Macierz odwrotna

Definicja 5.3. *Macierz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ taką że* $\det A \neq 0$ *nazywamy* **macierzą nieosobliwą***; w przeciwnym przypadku mówimy, że A jest* **macierzą osobliwą***.*

Przypomnijmy, że iloczyn macierzy jest działaniem wewnętrznym w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n. Łatwo sprawdzić, że jest to również działanie łączne, którego elementem neutralnym jest macierz jednostkowa I_n stopnia n (dowód przez bezpośredni rachunek). Nasuwa się więc następujące pytanie: *Czy każda macierz kwadratowa posiada element odwrotny (względem mnożenia)?*

Przykład 5.8. *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+a_{21} & a_{12}+a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że nie dla każdej macierzy istnieje element odwrotny.

Definicja 5.4. *Jeżeli dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ istnieje macierz $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ taka że:*

$$AX = XA = I_n,$$

gdzie I_n oznacza macierz jednostkową stopnia n, to macierz tę nazywamy **macierzą odwrotną** *do macierzy A i oznaczamy A^{-1}.*

Twierdzenie 5.5. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby macierz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ posiadała macierz odwrotną jest warunek* $\det A \neq 0$.

Własności operacji odwracania macierzy $(A, B \in \mathbb{F}^{n\times n})$**:**

- $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$;
- $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$ oraz $\left(A^{-1}\right)^* = \left(A^*\right)^{-1}$.

5.3.1. Algorytmy wyznaczania macierzy odwrotnej

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

Metoda macierzy dopełnień algebraicznych

Poniżej przedstawimy algorytm wyznaczania macierzy A^{-1} oparty na macierzy dopełnień algebraicznych.

Krok 1. *Obliczamy* $\det A$*. Jeżeli* $\det A = 0$*, to macierz A^{-1} nie istnieje; jeżeli* $\det A \neq 0$*, przechodzimy do kroku drugiego.*

Krok 2. *Wyznaczamy macierz minorów* $A_1 = [M_{ij}]$;

Krok 3. *Wyznaczamy macierz dopełnień algebraicznych* $A_2 = \left[(-1)^{i+j} M_{ij}\right]$;

Krok 4. *Wyznaczamy macierz* $A_3 = A_2^T$;

Krok 5. *Wyznaczamy macierz* $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_3$.

Przykład 5.9. *Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy*

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det A=-5$ *zatem macierz odwrotna istnieje. Mamy więc:*

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\overset{M_{ij}}{\to}\begin{bmatrix}-2 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 1\\ 0 & -5 & 5\end{bmatrix}\overset{(-1)^{i+j}}{\to}\begin{bmatrix}-2 & -1 & -2\\ -1 & -3 & -1\\ 0 & 5 & 5\end{bmatrix}\overset{T}{\to}$$

$$\overset{T}{\to}\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ -1 & -3 & 5\\ -2 & -1 & 5\end{bmatrix}\overset{\frac{1}{\det A}}{\to}\begin{bmatrix}2/5 & 1/5 & 0\\ 1/5 & 3/5 & -1\\ 2/5 & 1/5 & -1\end{bmatrix}=A^{-1}$$

Metoda Gaussa

Metoda Gaussa wyznaczania macierzy odwrotnej polega na tym, aby z danej macierzy uzyskać macierz jednostkową. Te same operacje, które wykonujemy na macierzy A przeprowadzamy jednocześnie na macierzy jednostkowej. W momencie gdy wyjściowa macierz przyjmuje postać macierzy jednostkowej, macierz jednostkowa staje się macierzą A^{-1}.

Przykład 5.10. *Rozważmy ponownie macierz z poprzedniego przykładu. Mamy:*

$$[A\,|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}w_1\to w_1\\ w_2\to w_2-\frac{1}{2}w_1\\ w_3\to w_3-w_2\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}w_1\to w_1\\ w_2\to w_2\\ w_3\to w_3+\frac{4}{5}w_2\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2/5 & -1/5 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}w_3\to -w_3\\ w_2\to w_2-\frac{5}{2}w_3\\ w_1\to w_1+w_3\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & 0 & 3/5 & -1/5 & 1\\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & -5/2\\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1\end{array}\right]\begin{array}{l}w_3\to w_3\\ w_2\to \frac{2}{5}w_2\\ w_1\to w_1+\frac{2}{5}w_2\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 4/5 & 2/5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1\end{array}\right]\begin{array}{l}w_1\to \frac{1}{2}w_1\\ w_2\to w_2\\ w_3\to w_3\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1\end{array}\right]=\left[I\,|A^{-1}\right].$$

5.4. Rząd macierzy

Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$. Można pokazać, że liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy jest taka sama jak liczba jej liniowo niezależnych wierszy. Liczbę tę, dla macierz A, oznaczamy $\operatorname{rank}(A)$ i nazywamy **rzędem** macierzy A.

Własności rzędu macierzy

- dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(A^T\right)$;
- dodanie do dowolnej kolumny (wiersza) macierzy kombinacji liniowej pozostałych kolumn (wierszy) nie zmienia jej rzędu;
- dowolna zmiana kolejności kolumn (wierszy) macierzy nie zmienia jej rzędu.

Przykład 5.11. *Wyznaczymy rząd macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Stosując metodę sprowadzania macierzy do postaci trójkątnej (zob. rozdział 5.2.3, str. 32) mamy:

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + \frac{1}{2} w_1 \\ w_3 \to w_3 \end{array} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 - \frac{2}{3} w_2 \end{array} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ tylko dwa pierwsze wiersze ostatniej macierzy są liniowo niezależne, zatem $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Twierdzenie 5.6. *Rząd macierzy A równy jest największemu stopniowi (wymiarowi) niezerowego minora macierzy A.*

Przykład 5.12. *Rozważmy ponownie macierz*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ zatem $\operatorname{rank}(A) \leqslant 3$. *Ponieważ*

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

zatem $\operatorname{rank}(A) \leqslant 2$. *Ponieważ*

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$$

zatem $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Rozdział 6

Równania liniowe

6.1. Przekształcenia liniowe

Niech X oraz Y będą dwiema niepustymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$.

Definicja 6.1. *Funkcję $f : X \to Y$ spełniającą warunki:*

a) *dla dowolnych $x_1, x_2 \in X : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;*
b) *dla dowolnych $x \in X, \alpha \in \mathbb{F} : f(\alpha x) = \alpha f(x)$*

nazywamy **przekształceniem liniowym**.

Przypuśćmy, że wymiary przestrzeni X oraz Y są skończone; niech $\dim X = n$ oraz $\dim Y = m$. Przyjmijmy, że wektory $e_1, \ldots, e_n$ stanowią bazę przestrzeni X, a wektory $\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_m$ bazę przestrzeni Y. Z odwzorowaniem liniowym $f : X \to Y$ możemy wówczas stowarzyszyć macierz $A_f = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, której i–tą kolumnę $(i = 1, \ldots, n)$ tworzą współrzędne wektora $f(e_i)$ wyrażonego jako kombinacja liniowa wektorów bazowych przestrzeni Y:

$$\begin{array}{c} f(e_1) = a_{11}\tilde{e}_1 + a_{21}\tilde{e}_2 + \cdots + a_{m1}\tilde{e}_m, \\ f(e_2) = a_{12}\tilde{e}_1 + a_{22}\tilde{e}_2 + \cdots + a_{m2}\tilde{e}_m, \\ \vdots \\ f(en) = a_{1n}\tilde{e}_1 + a_{2n}\tilde{e}_2 + \cdots + a_{mn}\tilde{e}_m \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad A_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Przykład 6.1. *Rozważmy odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem*

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + z).$$

Przyjmując w przestrzeniach X oraz Y bazy kanoniczne mamy:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1,0,0) = (1,2) = \tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2, \\ f(e_2) &= f(0,1,0) = (1,0) = \tilde{e}_1, \\ f(e_3) &= f(0,0,1) = (-1,1) = -\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2. \end{aligned}$$

Odwzorowanie f jest więc reprezentowane przez macierz

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

innymi słowy

$$f(x,y,z)=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

Przykład 6.2. *Niech $F:\pi_1\to\pi_2$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem:*

$$F(f(x))=2xf(x)-f(x).$$

Łatwo sprawdzić, że F jest odwzorowaniem liniowym. Przyjmując w przestrzeniach π_1 oraz π_2 bazy

$$\begin{aligned}&w\ \pi_1: e_1(x)=1, e_2(x)=x\\&w\ \pi_2: \tilde{e}_1(x)=1, \tilde{e}_2(x)=x, \tilde{e}_3(x)=x^2\end{aligned}$$

mamy:

$$\begin{aligned}F(e_1)&=F(1)=2x-1=-\tilde{e}_1+2\tilde{e}_2,\\F(e_2)&=F(x)=2x^2-x=0\tilde{e}_1-\tilde{e}_2+2\tilde{e}_3.\end{aligned}$$

Przy przyjętych bazach, odwzorowanie F reprezentowane jest przez macierz

$$A_F=\begin{bmatrix}-1&0\\2&-1\\0&2\end{bmatrix}.$$

Przykład 6.3. *Rozważmy ponownie odwzorowanie F z przykładu 6.2. Przyjmując w przestrzeni π_1 bazę*

$$e_1(x)=x+1,\qquad e_2(x)=x-1,$$

a w przestrzeni π_2 bazę

$$\tilde{e}_1(x)=x-1,\quad \tilde{e}_2(x)=x+1,\quad \tilde{e}_3(x)=x^2,$$

mamy

$$\begin{aligned}F(e_1)&=F(x+1)=2x(x+1)-(x+1)=2x^2+x-1=\tilde{e}_1+2\tilde{e}_3,\\F(e_2)&=F(x-1)=2x(x-1)-(x-1)=2x^2-3x+1=\alpha_{21}\tilde{e}_1+\alpha_{22}\tilde{e}_2+2\tilde{e}_3.\end{aligned}$$

Skalary α_{21},α_{22} wyznaczymy rozwiązując równanie

$$-3x+1=\alpha_{21}(x-1)+\alpha_{22}(x+1).$$

Po prostych rachunkach otrzymujemy: $\alpha_{21}=-2,\alpha_{22}=-1$. Tym razem odwzorowanie F jest reprezentowane przez macierz

$$A_F=\begin{bmatrix}1&-2\\0&-1\\2&2\end{bmatrix}.$$

Z powyższych przykładów wynika, że postać macierzy reprezentującej odwzorowanie liniowe $f:X\to Y$ zależy od wyboru baz w przestrzeniach X,Y.

6.2. Jądro i obraz odwzorowania liniowego

Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $V \subset X$ i $W \subset Y$ dowolnymi podprzestrzeniami liniowymi. Łatwo sprawdzić (ćwiczenie), że zbiory

$$f(V) = \{y \in Y : \exists x \in V : y = f(x)\},$$
$$f^{-1}(W) = \{x \in X : \exists y \in W : y = f(x)\}$$

z działaniami indukowanymi z przestrzeni X oraz Y, są podprzestrzeniami liniowymi, odpowiednio, przestrzeni X oraz Y.

Definicja 6.2. *Zbiór* $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ *nazywamy* **jądrem** *odwzorowania* f; *zbiór* $\operatorname{Im} f = f(X)$ *nazywamy* **obrazem** *odwzorowania* f.

Z obserwacji poprzedzającej powyższą definicję wynika, że

- *jądro odwzorowania liniowego* $f : X \to Y$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* X;
- *obraz odwzorowania liniowego* $f : X \to Y$ *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* Y.

Przy wyznaczaniu jądra oraz obrazu odwzorowania liniowego przydatne bywa następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.1. *Niech* X *oraz* Y *będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi oraz niech* $f : X \to Y$ *będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas*

$$\dim X = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f. \tag{6.1}$$

Dowód: Niech $\dim \ker f = k$ oraz $\dim X = n$; oczywiście $k \leqslant n$. Przypuśćmy, że wektory $e_1, \ldots, e_k$ tworzą bazę przestrzeni $\ker f$. Wektory te możemy uzupełnić o wektory $e_{k+1}, \ldots, e_n$ tak, aby $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\} = X$.

W celu wykazania równości (6.1) wystarczy udowodnić, że $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\}$ oraz, że wektory $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ są liniowo niezależne.

Niech $y \in \operatorname{Im} f$. Oznacza to, że istnieje $x \in X = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ dla którego $y = f(x)$. Mamy więc

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = f\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) \\ &= f\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i\right) + f\left(\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = f\left(\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i), \end{aligned}$$

co oznacza, że $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)\}$.

Wykażemy teraz, że wektory $f(e_{k+1}), \ldots, f(e_n)$ są liniowo niezależne. Mamy

$$\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i\right) = 0,$$

zatem $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i \in \ker f = \operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_k\}$. Stąd, istnieją skalary $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ dla których

$$\textstyle\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i,$$

lub równoważnie

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i - \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i e_i = 0.$$

Z liniowej niezależności wektorów $e_1, \ldots, e_n$ wynika, że $\alpha_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. ■

Z powyższego dowodu wynika, że $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$, gdzie $e_1, \ldots, e_n$ jest dowolną bazą przestrzeni X. Niech A_f będzie macierzą odwzorowania f przy ustalonych bazach przestrzeni X oraz Y. Ponieważ i–ta kolumna macierzy A_f to współrzędne wektora $f(e_i)$ w ustalonej bazie przestrzeni X, zatem liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy A_f równa jest liczbie liniowo niezależnych wektorów spośród wektorów $f(e_1), \ldots, f(e_n)$. Wynika stąd następujące

Twierdzenie 6.2. *Niech X oraz Y będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi, niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech A_f będzie macierzą odwzorowania f (przy ustalonych bazach przestrzeni X oraz Y). Wówczas*

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank}(A_f).$$

Przykład 6.4. *Rozważmy ponownie odwzorowanie z przykładu 6.2:*

$$F(f(x)) = 2xf(x) - f(x).$$

Wówczas

$$\begin{aligned}\ker F &= \{x \to ax + b : 2x(ax+b) - ax - b \equiv 0\} \\ &= \left\{x \to ax + b : 2ax^2 + (2b-a)x - b \equiv 0\right\} = \{0\}.\end{aligned}$$

Zatem

$$2 = \dim \pi_1 = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F = 0 + \dim \operatorname{Im} F.$$

Stąd $\operatorname{Im} F = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$, *gdzie*

$$\begin{aligned}e_1(x) &= F(1) = 2x - 1 \\ e_2(x) &= F(x) = 2x^2 - x = x(2x-1).\end{aligned}$$

Ostatecznie $\operatorname{Im} F = \pi_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

6.3. Układy równań liniowych

Rozważmy układ m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, \ldots, x_n$:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right., \tag{6.2}$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$; $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. W przypadku, gdy $b_1 = \cdots = b_m = 0$ układ (6.2) nazywamy **układem jednorodnym**. Przyjmując oznaczenia:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

układ równań (6.2) możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$Ax = b. \tag{6.3}$$

6.3.1. Twierdzenie Cramera

W przypadku, gdy liczba równań układu (6.2) jest równa liczbie niewiadomych, macierz A jest macierzą kwadratową. Jeżeli jest to macierz nieosobliwa, to układ równań (6.2) nazywamy **układem Cramera**. Rozwiązanie równania (6.3) – a więc i układu (6.2) – można wówczas prosto wyliczyć wykorzystując macierz A^{-1}:

$$x = A^{-1}b.$$

Rozwiązanie układu równań (6.2) można również wyrazić stosując **wzory Cramera**.

Twierdzenie 6.3 (Cramer). *Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{F}^n$. Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to układ równań (6.3) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x = (x_1, \ldots, x_n)$:*

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad (i = 1, \ldots, n)\,, \tag{6.4}$$

macierz A_i oznacza macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie jej i–tej kolumny wektorem b.

Dowód: Niech $a_{\cdot i}$ oraz $I_{\cdot i}$ oznaczają i–te kolumny odpowiednio macierzy A oraz macierzy jednostkowej I_n. Wówczas

$$\begin{aligned}
\frac{\det A_i}{\det A} &= \frac{\det\,[a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot i-1}, b, a_{\cdot i+1}, \ldots, a_{\cdot n}]}{\det A} \\
&= \det\left(A^{-1}\,[a_{\cdot 1}, a_{\cdot 2}, \ldots, a_{\cdot i-1}, b, a_{\cdot i+1}, \ldots, a_{\cdot n}]\right) \\
&= \det\left[A^{-1}a_{\cdot 1}, A^{-1}a_{\cdot 2}, \ldots, A^{-1}a_{\cdot i-1}, A^{-1}b, A^{-1}a_{\cdot i+1}, \ldots, A^{-1}a_{\cdot n}\right] \\
&= \det\,[I_{\cdot 1}, I_{\cdot 2}, \ldots, I_{\cdot i-1}, x, I_{\cdot i+1}, \ldots, I_{\cdot n}] = x_i.
\end{aligned}$$

■

Łatwo stwierdzić, że układ równań jednorodnych ma zawsze przynajmniej jedno rozwiązanie; jest nim rozwiązanie zerowe. Z twierdzenia Cramera wynika natomiast, że jeżeli jednorodny układ równań liniowych jest układem Cramera, to rozwiązanie to jest jego jedynym rozwiązaniem.

Przykład 6.5. *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Mamy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \textit{oraz} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det A = -3$ *zatem jest to układ Cramera, którego rozwiązanie określa wzór (6.4):*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5}{3}.$$

6.3.2. Twierdzenie Kroneckera–Capellego

Rozważmy, jak poprzednio, układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, b \in \mathbb{F}^m$. Niech $U \in \mathbb{F}^{m\times(n+1)}$ będzie macierzą powstałą z macierzy A przez dołączenie do tej ostatniej dodatkowej kolumny – wektora b, tj.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

Macierz U nazywamy **macierzą uzupełnioną**. Jest jasne, że $\operatorname{rank} U \geqslant \operatorname{rank} A$. Z postaci równania (6.2), które możemy zapisać w postaci:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

wynika, że układ równań $Ax = b$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wektor b jest kombinacją liniową kolumn macierzy A. Warunek ten możemy równoważnie wyrazić jako równość

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U.$$

Twierdzenie 6.4 (Kroneckera-Capellego). *Układ równań $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, b \in \mathbb{F}^m$, ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U$. Ponadto:*

- *jeżeli $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U = n$ (n– liczba niewiadomych) to rozwiązanie to jest jedyne;*
- *jeżeli $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U = r < n$ to rozwiązań jest nieskończenie wiele; wszystkie one dają się wyrazić jako funkcja zależna od $n - r$ parametrów.*

Przykład 6.6. *Rozważmy układ równań:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}.$$

Mamy $n = 3$ oraz

$$U = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right].$$

Rzędy macierzy A oraz U wyznaczymy korzystając z metody eliminacji Gaussa:

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right] = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right] = \operatorname{rank}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

Oznacza to, że $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U = 2$. Z twierdzenia 6.4 wynika więc, że rozważany układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego ($n - \operatorname{rank} A$) parametru. Wyznaczymy te rozwiązania.

Sposób 1. *Mając wyjściowy układ równań sprowadzony do postaci trójkątnej, poszukiwane rozwiązanie wyznaczymy klasyczną metodą dedykowaną dla układów o macierzach trójkątnych:*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sposób 2. *Skoro $\operatorname{rank} A = 2$ to macierz A zawiera nieosobliwą podmacierz stopnia 2; odnajdujemy tę macierz w rozwiązywanym układzie równań. Równania, które nie wchodzą w skład tej macierzy odrzucamy, z kolei niewiadome, których wybrana podmacierz nie obejmuje, przerzucamy na drugą stronę równania i traktujemy jako parametry. Układ równań, jaki w ten sposób otrzymujemy, jest układem Cramera – do jego rozwiązania stosujemy wzory (6.4).*

W naszym przypadku, ponieważ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

zatem układy równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x - y = -1 - 2z \end{cases}$$

są równoważne (mają te same rozwiązania). Stosując do tego ostatniego układu wzory (6.4), mamy:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ -1-2z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = -z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -1-2z \end{vmatrix}}{-3} = 1, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

6.4. Metoda eliminacji Gaussa

Przedstawiony poniżej sposób rozwiązywania układów równań liniowych jest pewnym uproszczeniem algorytmu zwanego metodą eliminacji Gaussa. Metoda ta, niezwykle efektywna pod względem numerycznym (nie istnieje algorytm rozwiązywania układów równań wymagający istotnie mniejszej liczby działań niż metoda eliminacji Gaussa), polega na sprowadzeniu macierzy uzupełnionej odpowiadającej rozwiązywanemu układowi równań do uogólnionej postaci trójkątnej (nazywanej również postacią schodkową). Aby osiągnąć ten efekt, na macierzy uzupełnionej wykonujemy dwa rodzaje operacji:

- dodajemy do wybranego wiersza sumy pozostałych wierszy pomnożonych przez odpowiednio dobrane stałe;
- zamieniamy kolejność wierszy.

Do uzyskanej w ten sposób macierzy stosujemy twierdzenie Kroneckera–Capellego. Warto przypomnieć w tym miejscu, że pierwsza z wymienionych powyżej operacji nie zmienia wartości wyznacznika, druga może zmienić jedynie jego znak. W efekcie, metoda eliminacji Gaussa może być również stosowana do obliczania rzędu i wyznacznika macierzy oraz do wyznaczania macierzy odwrotnej. Ideę metody eliminacji Gaussa wyjaśnimy na kilku przykładach.

Przykład 6.7 (rozwiązywanie układu oznaczonego). *Celem naszym jest rozwiązanie układu równań*

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 0 \\ -x - 2y - z + w = 1 \\ x + y - 2z - 3w = 2 \\ 4x - 2y + 4w = 2 \end{cases}. \tag{6.5}$$

Macierz uzupełniona U rozważanego układu ma postać

$$U = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 & 2 \end{array} \right).$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa wykorzystujemy pierwszy wiersz, nazywany ***wierszem głównym dla pierwszego kroku.*** *Postępujemy w sposób następujący: do drugiego wiersza dodajemy pierwszy pomnożony przez $\frac{1}{2}$; do trzeciego pomnożony przez $-\frac{1}{2}$; do czwartego pomnożony przez*

-2. *Liczbę 2 – pierwszy niezerowy element wiersza głównego nazywamy* ***elementem głównym dla pierwszego kroku****. Otrzymujemy*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left|\begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 + \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \rightarrow w_3 - \frac{1}{2}w_1 \\ w_4 \rightarrow w_4 - 2w_1 \end{array}\right. \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

W kolejnym kroku, wierszem głównym jest wiersz drugi nazywany ***wierszem głównym dla drugiego kroku****; elementem głównym dla drugiego kroku jest* $-\frac{3}{2}$*. Postępujemy analogicznie jak w kroku pierwszym: do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez* $\frac{1}{3}$*; do wiersza czwartego pomnożony przez* $-\frac{8}{3}$*. Otrzymujemy:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left|\begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 + \frac{1}{3}w_2 \\ w_4 \rightarrow w_4 - \frac{8}{3}w_2 \end{array}\right. \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -2 & -\frac{2}{3} \end{array}\right).$$

W ostatnim, trzecim kroku wierszem głównym jest wiersz trzeci – ***wiersz główny dla kroku trzeciego****; elementem głównym jest* $-\frac{8}{3}$*. Mnożąc trzeci wiersz przez* $-\frac{1}{4}$ *i dodając do wiersza czwartego otrzymujemy:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -2 & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \rightarrow \left|\begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 \\ w_4 \rightarrow w_4 - \frac{1}{4}w_3 \end{array}\right. \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right). \tag{6.6}$$

Uzyskana w ten sposób macierz schodkowa jest macierzą uzupełnioną układu równań posiadającego te same rozwiązania, co wyjściowy układ:

$$\left\{\begin{array}{r} 2x + y + z + w = 0 \\ -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z + \frac{3}{2}w = 1 \\ -\frac{8}{3}z - 3w = \frac{7}{3} \\ -\frac{5}{4}w = -\frac{5}{4} \end{array}\right. .$$

Z postaci macierzy widać również, że układ ten posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Wyznaczamy je rozwiązując otrzymany układ równań w kolejności od ostatniego równania do pierwszego. Uzyskujemy kolejno:

$$w = 1, z = -2, y = 1, x = 0.$$

Warto zanotować, że operacje jakie wykonywaliśmy na macierzy wyjściowego układu równań (6.5), aby sprowadzić ją do postaci trójkątnej (6.6) nie zmieniły jej wyznacznika. Ponieważ wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów z przekątnej mamy

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = -10.$$

Przykład 6.8 (rozwiązywanie układu nieoznaczonego). *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 6 \\ -4x + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 4 \end{cases}.$$

Macierz uzupełniona tego układu ma postać

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa do wiersza drugiego dodajemy wiersz pierwszy pomnożony przez 2; wiersz trzeci natomiast przepisujemy bez zmian:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left| \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + 2w_1 \\ w_3 \to w_3 \end{array} \right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right).$$

W kroku drugim, do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez $-\frac{1}{3}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left| \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 - \frac{1}{3}w_2 \end{array} \right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

łatwo teraz stwierdzić, korzystając z twierdzenia Kroneckera – Capellego, że rozważany układ równań jest nieoznaczony (posiada nieskończenie wiele rozwiązań). Jest on równoważny układowi

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 6 \\ 6y - 6z = 12 \end{cases},$$

którego rozwiązania, równe rozwiązaniom wyjściowego układu, mają postać

$$x = t, y = 2 + 2t, z = 2t,$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$ jest dowolnym parametrem.

Przykład 6.9 (rozwiązywanie układu sprzecznego). *Rozważmy układ równań*

$$\begin{cases} 5x - 2y - z = 1 \\ -2x + 2y - 2z = 2 \\ -x - 2y + 5z = 1 \end{cases},$$

dla którego macierz uzupełniona U ma postać

$$U = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

W pierwszym kroku metody eliminacji Gaussa do wiersza drugiego dodajemy wiersz pierwszy pomnożony przez $\frac{2}{5}$*; do wiersza trzeciego pomnożony przez* $\frac{1}{5}$*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \end{array}\right) \to \left| \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 + \frac{2}{5}w_1 \\ w_3 \to w_3 + \frac{1}{5}w_1 \end{array} \right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & -\frac{12}{5} & \frac{24}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right).$$

W drugim kroku do wiersza trzeciego dodajemy wiersz drugi pomnożony przez 2*:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & -\frac{12}{5} & \frac{24}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right) \to \left| \begin{array}{l} w_1 \to w_1 \\ w_2 \to w_2 \\ w_3 \to w_3 + 2w_2 \end{array} \right. \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{6}{5} & -\frac{12}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

Na podstawie twierdzenia Kroneckera – Capellego stwierdzamy, że otrzymany układ równań jest sprzeczny. Oznacza to, że i wyjściowy układ równań nie posiada rozwiązań.

Rozdział 7

Wartości i wektory własne

Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Niech $f : X \to X$ będzie **endomorfizmem**, tj. odwzorowaniem liniowym przekształającym przestrzeń liniową w nią samą.

Definicja 7.1. *Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ nazywamy* **wartością własną** *endomorfizmu f jeżeli istnieje niezerowy wektor $v \in X$, taki że*

$$f(v) = \lambda v; \tag{7.1}$$

wektor v nazywamy **wektorem własnym** *odpowiadającym wartości własnej λ.*

Zachodzi następujące

Twierdzenie 7.1. *Dla endomorfizmu $f : X \to X$ następujące warunki są równoważne:*

(a) *λ jest wartością własną f;*
(b) $\ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_X) \neq \{0\}$;
(c) $\det(A_f - \lambda I) = 0$, *gdzie A_f jest macierzą endomorfizmu f (w dowolnej bazie przestrzeni X).*

Niech teraz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ będzie dowolną macierzą, a X n–wymiarową przestrzenią liniową o bazie $e_1, \ldots, e_n$. Możemy skonstruować endomorfizm $f : X \to X$, którego macierzą w ustalonej bazie $e_1, \ldots, e_n$ jest macierz A. Endomorfizm ten wystarczy zdefiniować na wektorach bazowych (co z innymi wektorami?) w następujący sposób:

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Pojęcia wartości własnej oraz wektora własnego w sposób naturalny przenoszą się więc na macierze.

Definicja 7.2. *Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ nazywamy* **wartością własną** *macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jeżeli istnieje wektor $v \neq 0$, taki że*

$$Av = \lambda v;$$

wektor v nazywamy **wektorem własnym** *odpowiadającym wartości własnej λ.*

Zbiór wszystkich wartości własnych macierzy A oznaczamy $\sigma(A)$ i nazywamy jej **widmem**.
Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.2. *Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ następujące warunki są równoważne:*

(a) *λ jest wartością własną A;*
(b) *układ równań $(A-\lambda I)\, v = 0$ ma niezerowe rozwiązanie;*
(c) $\det (A-\lambda I) = 0$.

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ odwzorowanie

$$\varphi_A : \lambda \to \det (A - \lambda I)$$

jest wielomianem stopnia n (ćwiczenie), którego pierwiastkami są wartości własne macierzy A. Wielomian φ_A nazywamy **wielomianem charakterystycznym** macierzy A.

Uwaga 7.1. *Jeżeli elementy macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ należą do ciała $\mathbb{F}$, które jest* **algebraicznie domknięte** *(tzn. każdy wielomian stopnia n o współczynnikach z ciała $\mathbb{F}$ ma n pierwiastków w ciele $\mathbb{F}$), to macierz A posiada n wartości własnych (liczonych z krotnościami). Jeżeli natomiast elementy macierzy są elementami ciała, które nie jest algebraicznie domknięte (takim ciałem jest na przykład ciało liczb rzeczywistych!), to macierz ta może nie mieć wartości własnych (zob. przykład 7.4 poniżej).*

Przypuśćmy, że $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \sigma(A)$ są wartościami własnymi macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Wówczas, wielomian charakterystyczny φ_A macierzy A możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \\ &= a_n(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n).\end{aligned}$$

Łatwo wykazać, że $a_n = (-1)^n$ oraz, uwzgleniając wzory Viète'a,

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n &= a_0 = \det A, \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_n &= (-1)^{n+1} a_{n-1} = \operatorname{tr}(A),\end{aligned}$$

gdzie $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + \ldots + a_{nn}$ to **ślad** macierzy A.

Własności widma macierzy $(A \in \mathbb{F}^{n\times n})$**:**

a) $\lambda \in \sigma(A),\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda^k \in \sigma\left(A^k\right);$
b) $\lambda \in \sigma(A)$, $\det A \neq 0 \Rightarrow \lambda^{-1} \in \sigma\left(A^{-1}\right);$
c) $\lambda \in \sigma(A)$, $\alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha\lambda \in \sigma(\alpha A);$
d) $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$; *w szczególności:* $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda \in \sigma\left(A^T\right)$.

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności.

Przykład 7.1. *Wyznaczymy wartości oraz wektory własne macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)$, zatem macierz A ma trzy różne wartości własne: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Dla każdej z nich wyznaczymy wektor własny:

- *dla $\lambda_1 = -1$ mamy:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 3y \\ -2x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

skąd otrzymujemy $(x,y,z) = (0,0,t)$, $t \in \mathbb{R}$; przykładowy wektor własny $v_{\lambda_1} = (0,0,1)$;

- *dla* $\lambda_2 = 1$ *mamy:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y \\ y \\ -2x - 2y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

skąd otrzymujemy $(x, y, z) = (t, 0, -t)$, $t \in \mathbb{R}$*; przykładowy wektor własny* $v_{\lambda_2} = (1, 0, -1)$;

- *dla* $\lambda_3 = 2$ *mamy:*

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 2y \\ 0 \\ -2x - 2y - 3z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

skąd otrzymujemy $(x, y, z) = (2t, t, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$*; przykładowy wektor własny* $v_{\lambda_3} = (2, 1, -2)$.

7.1. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Rozważmy macierz kwadratową $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ oraz wielomian w postaci

$$w(s) = a_m s^m + \ldots + a_1 s + a_0.$$

Możemy wówczas utworzyć macierz $w(A)$ określoną jako

$$w(A) = a_m A^m + \ldots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Definicja 7.3 (wielomian zerujący). *Jeżeli* $w(A) = 0_n$*, to wielomian* w *nazywamy* **wielomianem zerującym** *(wielomianem anulującym) macierzy* A.

Pytanie jakie może się nasunąć jest następujące – czy dla każdej macierzy istnieje wielomian zerujący? Odpowiedź jest zawarta w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 7.3 (Cayley–Hamilton). *Wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej jest jej wielomianem zerującym.*

Przykład 7.2 (odwracanie macierzy). *Rozważmy macierz* $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ *postaci*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jej wielomian charakterystyczny ma postać

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ -2 & -\lambda & 3 \\ 2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 - 6\lambda + 12.$$

Ponieważ $\varphi(0) = 12 \neq 0$ *zatem macierz* A *jest nieosobliwa. Wyznaczymy teraz jej odwrotność. Na podstawie twierdzenie Cayleya–Hamiltona możemy napisać*

$$-A^3 + A^2 - 6A + 12I_3 = 0_3$$

lub równoważnie

$$\frac{1}{12} A \left(A^2 - A + 6I_3\right) = I_3.$$

Oznacza to, na podstawie definicji macierzy odwrotnej, że

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\left(A^2 - A + 6I_3\right) = \frac{1}{12}\left(\begin{pmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 6 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

7.2. Podprzestrzeń własna

Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ oraz niech $\lambda \in \sigma(A)$. Zbiór

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : Av = \lambda v\}$$

składa się z $\mathbf{0}$ oraz wszystkich wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ. Ponieważ

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : (A - \lambda I)v = 0\} = \ker\{v \to (A - \lambda I)\, v\}$$

zatem zbiór ten – jako jądro endomorfizmu – jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{F}^n$; jest to tak zwana **podprzestrzeń własna** macierzy A (ew. podprzestrzeń własna endomorfizmu wyznaczonego przez macierz A) odpowiadająca wartości własnej λ. Wymiar podprzestrzeni własnej V_λ to tzw. **krotność geometryczna wartości własnej** λ – jest to liczba odpowiadających jej liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy A. Jak się wkrótce okaże, krotność geometryczna wartości własnej λ nigdy nie przekracza jej **krotności algebraicznej**, czyli krotności wartości własnej λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego φ_A.

Przykład 7.3. *Ponieważ macierz z przykładu 7.1 ma trzy różne wartości własne, zatem możemy dla niej wyznaczyć trzy podprzestrzenie własne:*

$$\begin{aligned} V_{\lambda_1} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0, z = t, t \in \mathbb{R}\right\};\\ V_{\lambda_2} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = t, y = 0, z = -t, t \in \mathbb{R}\right\};\\ V_{\lambda_3} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2t, y = t, z = -2t, t \in \mathbb{R}\right\}.\end{aligned}$$

Udowodnimy teraz twierdzenie, z którego wynika bardzo ważna własność podprzestrzeni własnych odpowiadających różnym wartościom własnym.

Twierdzenie 7.4. *Różnym wartościom własnym macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ odpowiadają liniowo niezależne wektory własne.*

Dowód: Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ $(k \leqslant n)$ będą różnymi wartościami własnymi macierzy A, a $v_i \in V_{\lambda_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$ odpowiadającymi im wektorami własnymi. Należy wykazać warunek

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0. \tag{7.2}$$

Dowód poprowadzimy przez indukcję względem k. Dla $k = 1$ teza zachodzi (wektor zerowy, mimo że należy do każdej podprzestrzeni własnej, nie jest wektorem własnym). Załóżmy, że teza zachodzi dla dowolnych $k-1$ wektorów własnych odpowiadających różnym wartościom własnym oraz, dla dowodu nie wprost, przypuśćmy, że warunek (7.2) nie jest spełniony. Oznacza to, że dla pewnego $i \in \{1, \ldots, k\}$:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \quad \text{oraz} \quad \alpha_i \neq 0.$$

Dla dowolnego $r \neq i$ mamy

$$\begin{aligned}0 = &(A - \lambda_r I)(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 (A - \lambda_r I) v_1 + \ldots + \alpha_k (A - \lambda_r I) v_k = \\ =&\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_r) v_1 + \ldots + \alpha_{r-1} (\lambda_{r-1} - \lambda_r) v_{r-1} + \alpha_{r+1} (\lambda_{r+1} - \lambda_r) v_{r+1} + \\ &+ \ldots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_r) v_k\end{aligned}$$

skąd, na podstawie założenia indukcyjnego, wynika, że wszystkie współczynniki $\alpha_m (\lambda_m - \lambda_r)$ są zerami; w szczególności $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_r) = 0$. Ponieważ $\lambda_i \neq \lambda_r$, zatem $\alpha_i = 0$, wbrew założeniu. ■

7.3. Diagonalizowalność

Niech $f : X \to X$ będzie endomorfizmem.

Definicja 7.4. *Endomorfizm f jest* **diagonalizowalny***, jeżeli istnieje baza przestrzeni X w której macierz tego endomorfizmu jest diagonalna.*

Pojęcie diagonalizowalności można również wprowadzić w zbiorze macierzy. Zanim to zrobimy wprowadzimy w zbiorze macierzy relację podobieństwa.

Definicja 7.5. *Niech $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Mówimy, że macierz A jest podobna do macierzy B (ozn. $A \sim B$) jeżeli istnieje macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, taka że*

$$A = PBP^{-1}. \tag{7.3}$$

Łatwo wykazać (ćwiczenie), że relacja podobieństwa macierzy jest relacją równoważności, tzn. jest:

- zwrotna, tj. $A \sim A$;
- symetryczna, tj. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;
- przechodnia, tj. $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Przypuśćmy teraz, że $A \sim B$. Oznacza to, że $A = PBP^{-1}$, dla pewnej macierzy nieosobliwej P. Mamy:

$$\begin{aligned}\varphi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det\left(PBP^{-1} - \lambda I\right) = \det P (B - \lambda I) P^{-1} = \\ &= \det P \det (B - \lambda I) \det P^{-1} = \varphi_B(\lambda)\end{aligned}$$

co oznacza, że **macierze podobne mają ten sam wielomian charakterystyczny**; w konsekwencji mają one również identyczne wartości własne.

Definicja 7.6. *Macierz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jest macierzą* **diagonalizowalną***, jeżeli jest podobna do macierzy diagonalnej.*

Zanim podamy twierdzenie charakteryzujące macierze diagonalizowalne rozważmy następujący przykład.

Przykład 7.4. *Niech*

$$A_1 = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierze te mają ten sam wielomian charakterystyczny

$$\varphi_{A_1}(\lambda) = \varphi_{A_2}(\lambda) = (1 - \lambda)^3.$$

Ponieważ widma macierzy A_1 oraz A_2 są jednoelementowe

$$\sigma(A_1) = \sigma(A_2) = \{1\},$$

możemy dla każdej z nich wyznaczyć po jednej przestrzeni własnej.

Dla macierzy A_1 mamy:

$$V^{(1)}_{\lambda=1} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x = x\right\} = \mathbb{R}^3,$$

co oznacza, że możemy dla niej wybrać dokładnie trzy liniowo niezależne wektory własne odpowiadające jej jedynej wartości własnej $\lambda = 1$. Macierz A_1 – jako macierz diagonalna – jest oczywiście macierzą diagonalizowalną.

Z kolei dla macierzy A_2 mamy

$$V^{(2)}_{\lambda=1} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : A_2 x = x\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : (A_2 - I)\, x = 0\right\} = \{(x_1, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Oznacza to, że dla macierzy A_2 znajdziemy tylko jeden liniowo niezależny wektor własny odpowiadający jej jedynej wartości własnej $\lambda = 1$. Ponadto, macierz A_2 nie jest diagonalizowalna. Jedyną macierzą diagonalną, do której macierz A_2 mogłaby być podobna, jest macierz jednostkowa (macierze podobne mają te same wartości własne). Musiałaby więc istnieć macierz nieosobliwa P spełniająca warunek

$$A_2 = P I_3 P^{-1} = I_3,$$

który nie jest prawdziwy.

Możliwość diagonalizacji macierzy A_1 oraz brak możliwości diagonalizacji macierzy A_2 jest wynikiem tego, że dla macierzy A_1 możemy wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność jej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego; dla macierzy A_2 warunek ten nie jest spełniony.

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 7.5. *Macierz $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy, gdy*

(a) jej wielomian charakterystyczny ma n pierwiastków w ciele $\mathbb{F}$ (liczonych z krotnościami);

(b) dla każdej wartości własnej macierzy A można wybrać tyle liniowo niezależnych wektorów własnych, ile wynosi krotność tej wartości własnej jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

Dowód: Przypuśćmy, że macierz A jest diagonalizowalna. Oznacza to, że istnieją macierz diagonalna $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$, $b_i \in \mathbb{F}$ oraz macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$, dla których $A = PBP^{-1}$, lub równoważnie

$$AP = PB. \tag{7.4}$$

Niech $P = [p_1, \ldots, p_n]$, gdzie $p_i \in \mathbb{F}^n$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ponieważ

$$AP = A\,[p_1, \ldots, p_n] = [Ap_1, \ldots, Ap_n]$$

oraz

$$PB = [p_1, \ldots, p_n]\operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) = [b_1 p_1, \ldots, b_n p_n],$$

zatem z warunku (7.4) otrzymujemy, że

$$Ap_i = b_i p_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7.5}$$

Z warunku (7.5) wynika, że wektory $p_1, \ldots, p_n$ są liniowo niezależnymi wektorami własnymi macierzy A odpowiadającymi wartościom własnym $b_1, \ldots, b_n$.

Przypuśćmy teraz, że macierz A posiada n liniowo niezależnych wektorów własnych $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F}^n$ odpowiadających wartościom własnym $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Niech $V = [v_1, \ldots, v_n] \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Macierz V jest nieosobliwa (dlaczego?). Ponadto:

$$AV = A\,[v_1, \ldots, v_n] = [Av_1, \ldots, Av_n] = [\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n] = V\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

skąd wynika, że $A = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) V^{-1}$. Macierz A jest więc diagonalizowalna. ■

Zanotujmy na koniec, że twierdzenie 7.4, mimo że sformułowane dla macierzy, pozostaje słuszne również dla dowolnego endomorfizmu $f : X \to X$, gdzie X jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. W szczególności, jeżeli f jest endomorfizmem diagonalizowalnym to istnieje baza przestrzeni X złożona z wektorów własnych endomorfizmu f, przy której macierz tego endomorfizmu jest diagonalna.

Przykład 7.5. *Niech $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ będzie macierzą postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$, zatem macierz A nie ma rzeczywistych wartości własnych – nie jest więc diagonalizowalna w klasie macierzy $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Ta sama macierz traktowana jako element przestrzeni $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ma dwie różne wartości własne $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, którym odpowiadają liniowo niezależne wektory własne równe odpowiednio $v_1 = (-i, 1)$ oraz $v_2 = (i, 1)$. Z dowodu twierdzenia 7.4 wynika, że $A = P \operatorname{diag}(i, -i) P^{-1}$, gdzie

$$P = [v_1, v_2] = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Faktycznie, ponieważ $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix}$, zatem

$$P \operatorname{diag}(i, -i) P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

Rozdział 8

Postać Jordana macierzy

8.1. Macierz Jordana

Niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Macierz $J_r(\lambda) \in \mathbb{F}^{r \times r}$ postaci

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

nazywamy **klatką Jordana** stopnia r. Oczywiście $J_1(\lambda) = [\lambda]$.

Definicja 8.1. *Macierz blokową $J \in \mathbb{F}^{n \times n}$ postaci*

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

gdzie $n_1 + \ldots + n_k = n$ oraz wszystkie niewypisane elementy macierzy J są zerami, nazywamy **macierzą Jordana**.

Skalary $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tworzące przekątną macierzy J są jej wartościami własnymi. Zauważmy również, że każda macierz diagonalna jest macierzą Jordana; wymiar każdej klatki Jordana J_{n_i} tworzącej przekątną tej macierzy jest równy jeden, tj. $J_{n_i} = [\lambda_i]$. Oznacza to, że każda macierz diagonalizowalna jest podobna do pewnej macierzy Jordana (zob. podrozdział 7.3, str. 50). Prawdziwe jest również dużo ogólniejsze

Twierdzenie 8.1. *Niech $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ będzie dowolną macierzą. Istnieje wówczas macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ taka że*

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} \tag{8.1}$$

oraz $n_1 + \ldots + n_k = n$. *Macierz Jordana* J *macierzy* A *jest wyznaczona w sposób jednoznaczny z dokładnością do kolejności klatek Jordana, które tworzą przekątną macierzy* J. *Ponadto, jeżeli macierz* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ma tylko rzeczywiste wartości własne to macierz* P, *ustalająca podobieństwo* A *oraz* J, *również może być wybrana jako macierz o elementach rzeczywistych.*

Przykład 8.1. *Niech*

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dla $\varepsilon \neq 0$. *Ponieważ* $\sigma(A_\varepsilon) = \{0, \varepsilon\}$ *zatem macierz* A_ε *jest diagonalizowalna. Łatwo wykazać, że*

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = S_\varepsilon J_\varepsilon S_\varepsilon^{-1}.$$

Oznacza to, że macierz

$$J_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jordana macierzy A_ε, *dla dowolnego* $\varepsilon \neq 0$. *Jednak, jeżeli* $\varepsilon \to 0$ *to* $J_\varepsilon \to [0]_{2\times 2}$, *podczas gdy macierzą Jordana macierzy* A_0 *jest macierz*

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 8.1. *Macierz Jordana* J *wyznaczona dla macierzy* A *nie musi być funkcją ciągłą elementów macierzy* A. *Oznacza to trudności z konstrukcją numerycznie akceptowalnego algorytmu wyznaczania, dla zadanej macierzy* A, *odpowiadającej jej macierzy Jordana.*

8.1.1. Własności macierzy Jordana

Niech $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ będzie dowolną macierzą, a $J \in \mathbb{F}^{n\times n}$ jej macierzą Jordana.

Własność 1 *Liczba* k *klatek Jordana tworzących macierz* J *jest równa liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy* A.

Własność 2 *Liczba klatek Jordana odpowiadających wartości własnej* λ *jest równa wymiarowi przestrzeni własnej macierzy* A *odpowiadającej tej wartości własnej (czyli liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających wartości własnej* λ*). Suma stopni wszystkich tych klatek równa jest krotności wartości własnej* λ *jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego macierzy* A.

Przykład 8.2. *Rozważmy macierz* $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ *postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

zatem macierz ma dwie wartości własne: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Wyznaczmy wymiary przestrzeni własnych odpowiadających tym wartościom własnym. Mamy:

$$\begin{aligned}
\dim V_{\lambda_1} &= \dim \{\ker (A - I)\} = 3 - \dim \{\operatorname{Im} (A - I)\} \\
&= 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1, \\
\dim V_{\lambda_2} &= \dim \{\ker (A - 2I)\} = 3 - \dim \{\operatorname{Im} (A - 2I)\} \\
&= 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

Na podstawie własności 1, macierz Jordana macierzy A składa się z dwóch klatek Jordana (możemy wybrać tylko dwa liniowo niezależne wektory własne). Na podstawie własności 2, wartości własnej $\lambda_1 = 1$ odpowiada jedna klatka Jordana stopnia 1, wartości własnej $\lambda_2 = 2$ musi więc odpowiadać jedna klatka Jordana stopnia 2. Macierz Jordana macierzy A ma więc postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład 8.3. *Rozważmy macierz $J \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ postaci*

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & \\ & & & 2 & 1 & & & \\ & & & 0 & 2 & & & \\ & & & & & 3 & 1 & \\ & & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & & 3 \end{bmatrix},$$

w której wszystkie niewypisane elementy są zerami. Macierz J jest macierzą Jordana. Posiada ona dwie wartości własne: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Z własności 2 wynika, że dla każdej z nich można wybrać tylko pod dwa liniowo niezależne wektory własne.

Powyższy przykład pokazuje, że w celu wyznaczenia macierzy Jordana dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ o znanych wartościach własnych $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, musimy umieć znajdować liczbę $N(m, \lambda)$ klatek Jordana stopnia m ($1 \leqslant m \leqslant n$) odpowiadających wartości własnej λ macierzy A. Aby wyznaczyć tę liczbę, zdefiniujmy ciąg $r_k(\lambda)$:

$$r_k(\lambda) = \operatorname{rank}\left((A - \lambda I)^k\right), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{8.2}$$

Oczywiście $r_0(\lambda) = \operatorname{rank} I = n$. Zauważmy ponadto, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$:

$$\ker\left((A - \lambda I)^k\right) \subset \ker\left((A - \lambda I)^{k+1}\right). \tag{8.3}$$

Dzieje się tak, gdyż dla $x \in \ker\left((A - \lambda I)^k\right)$:

$$(A - \lambda I)^{k+1} x = (A - \lambda I)\left((A - \lambda I)^k x\right) = (A - \lambda I)\, 0 = 0,$$

skąd wynika, że $x \in \ker\left((A - \lambda I)^{k+1}\right)$.

Z warunku (8.3) wynika natychmiast, że

$$\dim\ker\left((A-\lambda I)^k\right) \leqslant \dim\ker\left((A-\lambda I)^{k+1}\right);$$

tym samym

$$\begin{aligned} r_k(\lambda) &= \operatorname{rank}\left((A-\lambda I)^k\right) = n - \dim\ker\left((A-\lambda I)^k\right) \geqslant \\ &\geqslant n - \dim\ker\left((A-\lambda I)^{k+1}\right) = \operatorname{rank}\left((A-\lambda I)^{k+1}\right) = r_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Ciąg $r_k(\lambda)$ określony wzorem (8.2) jest więc ciągiem nierosnącym. Oznacza to, że od pewnego miejsca ciąg $r_k(\lambda)$ musi się stabilizować (tzn. staje się ciągiem stałym).

Własność 3 *Liczba $N(m,\lambda)$ klatek Jordana stopnia $m \geqslant 1$ odpowiadających wartości własnej λ jest równa:*

$$N(m,\lambda) = r_{m-1}(\lambda) - 2r_m(\lambda) + r_{m+1}(\lambda). \tag{8.4}$$

Aby zilustrować powyższą własność rozważmy następujący przykład.

Przykład 8.4. *Niech $J \in \mathbb{R}^{8\times 8}$ będzie macierzą z przykładu 8.3. Macierz J ma dwie wartości własne: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Ponieważ*

- *dla $\lambda_1 = 2$:*

$$J - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(J - 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 1 & 2 & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$(J - 2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & & 1 & 3 & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

zatem $r_0(2) = 8, r_1(2) = 6, r_2(2) = 4$ *oraz* $r_k(2) = 3$ *dla* $k \geqslant 3$. *Tym samym:*

$$\begin{aligned} N(1,2) &= 8 - 12 + 4 = 0, \\ N(2,2) &= 6 - 8 + 3 = 1, \\ N(3,2) &= 4 - 6 + 3 = 1, \\ N(k,2) &= 0, \ \ \textit{dla } k \geqslant 4. \end{aligned}$$

Oznacza to, że wartości własnej $\lambda_1 = 2$ *odpowiadają dwie klatki Jordana: jedna stopnia* 2 *i jedna stopnia* 3.

- *dla* $\lambda_2 = 3$*:*

$$J - 3I = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array} & & & \\ & \begin{array}{cc|} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ \hline \end{array} & & \\ & & \begin{array}{cc|} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \\ & & & \begin{array}{c|} 0 \\ \hline \end{array} \end{bmatrix}$$

$$(J - 3I)^2 = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} & & & \\ & \begin{array}{cc|} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ \hline \end{array} & & \\ & & \begin{array}{cc|} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \\ & & & \begin{array}{c|} 0 \\ \hline \end{array} \end{bmatrix}$$

zatem $r_0(3) = 8, r_1(3) = 6$ *oraz* $r_k(3) = 5$ *dla* $k \geqslant 2$. *Tym samym:*

$$\begin{aligned} N(1,3) &= 8 - 12 + 5 = 1, \\ N(2,3) &= 6 - 10 + 5 = 1, \\ N(k,3) &= 0, \ \ \textit{dla } k \geqslant 3. \end{aligned}$$

Wartości własnej $\lambda_2 = 3$ *odpowiadają więc dwie klatki Jordana: jedna stopnia* 1 *i jedna stopnia* 2. *Postać macierzy* J *potwierdza uzyskane wyniki.*

Pewną niedogodnością faktoryzacji (tj. rozkładu) Jordana $A = PJP^{-1}$ jest to, że w przypadku macierzy rzeczywistej posiadającej nierzeczywiste wartości własne jej macierz Jordana jest macierzą nierzeczywistą. W wielu zagadnieniach praktycznych, oznacza to konieczność poszukiwania innego rozkładu macierzy, nie tak prostego jak rozkład Jordana, ale prowadzącego do macierzy rzeczywistych.

8.2. Rzeczywista macierz Jordana*

Niech $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz niech λ i $\overline{\lambda}$ będzie parą nierzeczywistych sprzężonych wartości własnych macierzy A. Ponieważ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, zgodnie z (8.2),

$$r_k(\lambda) = \operatorname{rank}(A - \lambda I)^k = \operatorname{rank}\left(A - \overline{\lambda} I\right)^k = r_k\left(\overline{\lambda}\right)$$

zatem liczba $N(m,\lambda)$ klatek Jordana stopnia m odpowiadających wartości własnej λ jest równa liczbie $N\left(m,\overline{\lambda}\right)$ klatek Jordana stopnia m odpowiadających wartości własnej $\overline{\lambda}$. Oznacza to, że klatki

Jordana $J_m(\lambda)$ oraz $J_m\left(\overline{\lambda}\right)$, tworzące przekątną macierzy Jordana, muszą występować parami. Łatwo wykazać, że macierz

$$\begin{bmatrix} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_m\left(\overline{\lambda}\right) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}$$

jest podobna do macierzy

$$\begin{bmatrix} D(\lambda) & I_2 & & 0 \\ & D(\lambda) & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & D(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}, \tag{8.5}$$

gdzie $D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}$ oraz I_2 to macierz jednostkowa stopnia 2; macierzą P ustalającą to podobieństwo jest stosownie wybrana macierz permutacji.

Przykład 8.5. *Rozważmy macierz*

$$\begin{bmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2\left(\overline{\lambda}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Niech $I_n^{(i,j)}$ będzie macierzą powstałą z macierz jednostkowej I_n przez zamianę miejscami kolumn o indeksach i oraz j. Jest to tzw. macierz permutacji – pomnożenie dowolnej macierzy przez macierz $I_n^{(i,j)}$ z prawej (z lewej) strony powoduje zamianę miejscami kolumn (wierszy) o indeksach i oraz j. Wynika stąd, że $\left(I_n^{(i,j)}\right)^{-1} = I_n^{(i,j)}$. W rozważanym przypadku mamy

$$\begin{aligned} \left(I_4^{(2,3)}\right)^{-1} \begin{bmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2\left(\overline{\lambda}\right) \end{bmatrix} I_4^{(2,3)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{\lambda} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wracając do rozważań, zauważmy, że dla macierzy S postaci

$$S = \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

dla której

$$S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix},$$

przyjmując $\lambda = a + ib$, mamy

$$\begin{aligned} SD(\lambda)S^{-1} = SD(a+ib)S^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Przyjmując oznaczenie $C(a,b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, łatwo stwierdzić, że macierz (8.5) jest podobna do macierzy rzeczywistej

$$C_m(a,b) = \begin{bmatrix} C(a,b) & I_2 & & 0 \\ & C(a,b) & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & C(a,b) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m\times 2m}; \tag{8.6}$$

macierzą ustalającą to podobieństwo jest macierz blokowa $\mathrm{diag}(S,\ldots,S)$.

Otrzymane wyniki podsumujemy w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 8.2. *Dowolna macierz rzeczywista $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest podobna do macierzy rzeczywistej*

$$J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) & & & \\ & & & C_{m_1}(a_1,b_1) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & C_{m_l}(a_l,b_l) \end{bmatrix}, \tag{8.7}$$

w której $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ to rzeczywiste, a $a_1+ib_1,\ldots,a_l+ib_l$ nierzeczywiste wartości własne macierzy A; rzeczywiste macierze blokowe $J_{n_i}(\lambda_i)$ to klatki Jordana macierzy A występujące w jej postaci Jordana, bloki $C_{m_i}(a_i,b_i)$ stopnia $2m_i$ są postaci (8.6); $n_1+\ldots+n_k+2(m_1+\ldots+m_l)=n$.

Przykład 8.6. *Niech $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ będzie macierzą dla której $\sigma(A) = \{1, 1\pm i\}$ i taką że*

$$N(1,1+i) = N(1,1-i) = 2.$$

Z rozważań poprzedzających twierdzenie wynika, że jeżeli λ jest nierzeczywistą wartością własną macierzy A to liczba $N(m,\lambda)$ równa jest liczbie macierzy postaci (8.5) stopnia $2m$ tworzących rzeczywistą macierz Jordana J_{real} macierzy A. Tym samym, w rozważanym przypadku macierze Jordana J oraz J_{real} mają postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \quad J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przypuśćmy teraz, że dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$, dla której $\sigma(A) = \{1, 1\pm i\}$, mamy

$$N(2,1+i) = N(2,1-i) = 1.$$

W tym przypadku macierze Jordana J oraz J_{real} mają postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \quad J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rozdział 9

Baza Jordana

Niech X będzie n–wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Rozważmy dowolny endomorfizm $f : X \to X$. Wiemy, że postać macierzy endomorfizmu zależy od wyboru bazy w przestrzeni X. Wiemy również, że jeżeli endomorfizm f jest diagonalizowalny, to jego macierz w bazie przestrzeni X złożonej z jego n liniowo niezależnych wektorów własnych jest macierzą diagonalną. Ponieważ nie każdy endomorfizm jest diagonalizowalny, zatem nasuwa się pytanie o to, jak prosta może być postać macierzy endomorfizmu niediagonalizowalnego. W szczególności, czy istnieje baza przestrzeni wektorowej X, w której macierz endomorfizmu $f : X \to X$ jest macierzą Jordana?

Przykład 9.1. *Rozważmy macierz $J \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ postaci*

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$. Macierz J jest macierzą Jordana. Niech e_1, e_2, e_3, e_4 będzie bazą 4–wymiarowej rzeczywistej przestrzeni X oraz niech $f : X \to X$ będzie endomorfizmem wyznaczonym przez macierz J. Z postaci macierzy J otrzymujemy

$$\begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) = e_2 + \lambda e_3 \\ f(e_4) = e_3 + \lambda e_4 \end{cases}, \quad \textit{lub równoważnie} \quad \begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) - \lambda e_2 = e_1 \\ f(e_3) - \lambda e_3 = e_2 \\ f(e_4) - \lambda e_4 = e_3 \end{cases}.$$

Z równań tych wynika, że e_1 jest wektorem własnym endomorfizmu f odpowiadającym wartości własnej λ; pozostałe wektory e_2, e_3, e_4 spełniają równania

$$(f - \lambda\,\mathrm{id})(e_{k+1}) = e_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Powyższy przykład sugeruje sposób konstrukcji bazy przestrzeni wektorowej, w której macierz endomorfizmu jest macierzą Jordana.

9.1. Wektory główne

Przy założeniach i oznaczeniach sformułowanych na początku rozdziału, przypuśćmy że $\lambda \in \mathbb{F}$ jest wartością własną endomorfizmu f. Oznacza to, że dla endomorfizmu f istnieje co najmniej jeden wektor własny, który na potrzeby tego rozdziału oznaczymy $v_\lambda^{(1)}$ i będziemy nazywać **wektorem głównym rzędu** 1 odpowiadającym wartości własnej λ. Wektory główne rzędu $k \geqslant 2$ zdefiniujemy indukcyjnie: przypuśćmy, że $v_\lambda^{(k-1)} \in X$ jest wektorem głównym rzędu $k-1$ odpowiadającym wartości własnej λ.

Definicja 9.1. *Jeżeli istnieje niezerowy wektor $v_\lambda^{(k)} \in X$ spełniający warunek*

$$(f - \lambda \operatorname{id}_X)\, v_\lambda^{(k)} = v_\lambda^{(k-1)}, \tag{9.1}$$

to wektor ten nazywamy **wektorem głównym rzędu** k *odpowiadającym wartości własnej λ.*

Powyższą definicję można również sformułować dla macierzy. Wektor własny $v_\lambda^{(1)} \in \mathbb{F}^n$ macierzy A odpowiadający wartości własnej λ nazywać będziemy wektorem głównym rzędu 1. Przypuśćmy, że $v_\lambda^{(k-1)} \in \mathbb{F}^n$ jest wektorem głównym rzędu $k-1$ odpowiadającym wartości własnej λ.

Definicja 9.2. *Jeżeli istnieje niezerowy wektor $v_\lambda^{(k)} \in \mathbb{F}^n$ będący rozwiązaniem równania*

$$(A - \lambda I)\, v_\lambda^{(k)} = v_\lambda^{(k-1)}, \tag{9.2}$$

to wektor ten nazywamy **wektorem głównym rzędu** k *odpowiadającym wartości własnej λ.*

Przykład 9.2. *Rozważmy macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ postaci*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9.3}$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$ zatem macierz A ma dwie różne wartości własne: $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = 2$. Wyznaczymy dla tych wartości własnych wektory główne.

- *Dla $\lambda_1 = 1$, rozwiązując równanie*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  otrzymujemy: $x = y = 0, z \in \mathbb{R}$; wektor główny rzędy 1 ma więc postać $v_{\lambda_1}^{(1)} = (0,0,t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Aby wyznaczyć wektory główne rzędu 2 rozważmy, dla ustalonego $t \neq 0$, równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

  Łatwo stwierdzić, że równanie to nie posiada rozwiązań. Oznacza to, że dla wartości własnej $\lambda_1 = 1$ nie istnieją wektory główne rzędu $k \geqslant 2$.
- *Dla $\lambda_2 = 2$, rozwiązując równanie*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy: $x = z, y = 0$*; wektor główny rzędy* 1 *ma więc postać* $v_{\lambda_2}^{(1)} = (t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Aby wyznaczyć wektory główne rzędu* 2*, rozważmy, dla ustalonego* $t \neq 0$*, równanie*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Jego rozwiązaniem jest $x = z, y = t$*; wektor główny rzędu* 2 *ma więc postać* $v_{\lambda_2}^{(2)} = (r, t, r)$, $r \in \mathbb{R}$*. Zauważmy, że postać wektora* $v_{\lambda_2}^{(2)}$ *zależy od sposobu wyboru wektora* $v_{\lambda_2}^{(1)}$*. Aby wyznaczyć wektory główne rzędu* 3*, rozważmy, dla ustalonych* $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $r \in \mathbb{R}$*, równanie*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ t \\ r \end{bmatrix}.$$

Łatwo stwierdzić, że równanie to nie posiada rozwiązań, a tym samym nie istnieją dla wartości własnej $\lambda_2 = 2$ *wektory główne rzędu* $k \geqslant 3$*.*

Podsumowując, dla macierzy A *postaci (9.3) udało się wyznaczyć trzy liniowo niezależne wektory główne: jeden odpowiadający wartości własnej* λ_1 *oraz dwa odpowiadające wartości własnej* λ_2*. Przyjmując na przykład* $t = r = 1$*, otrzymujemy*

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= (0, 0, 1), \\ v_2^{(1)} &= (1, 0, 1), \\ v_3^{(2)} &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Ustalając w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ *bazę kanoniczną, macierz* A *określa endomorfizm* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*:*

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x + y, 2y, x + y + z),$$

Wyznaczone powyżej wektory $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$ *są również bazą przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*, a zatem możemy zapytać o postać macierzy endomorfizmu* f *w tej właśnie bazie. Ponieważ*

$$\begin{aligned} f\left(v_1^{(1)}\right) &= f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = v_1^{(1)} + 0v_2^{(1)} + 0v_2^{(2)}, \\ f\left(v_2^{(1)}\right) &= f(1, 0, 1) = (2, 0, 2) = 0v_1^{(1)} + 2v_2^{(1)} + 0v_2^{(2)}, \\ f\left(v_2^{(2)}\right) &= f(1, 1, 1) = (3, 2, 3) = 0v_1^{(1)} + v_2^{(1)} + 2v_2^{(2)}, \end{aligned}$$

więc macierz A_f *endomorfizmu* f *w bazie złożnej z wektorów głównych macierzy* A *ma postać*

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jest to macierz Jordana macierzy A*, którą w zupełnie inny sposób uzyskaliśmy w przykładzie 8.2. Zauważmy również, że dla macierzy* $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$*, której kolumnami są wektory* $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$*, tj.*

$$P = \left[v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

mamy

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J.$$

Macierz P jest więc macierzą ustalającą podobieństwo między macierzą A oraz jej macierzą Jordana.

Własności wektorów głównych

Własność 9.1. *Dla każdej wartości własnej istnieją wektory główne rzędu co najmniej 1.*

Własność 9.2. *Wektory główne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.*

Własność 9.3. *Wektory główne różnych rzędów odpowiadające tej samej wartości własnej są liniowo niezależne.*

Własność 9.4. *Dla wartości własnej λ o krotności r (krotności jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego) istnieje dokładnie r liniowo niezależnych wektorów głównych; wśród nich są wszystkie liniowo niezależne wektory własne odpowiadające wartości własnej λ.*

Z powyższych własności wektorów głównych wynika, że **dla dowolnego endomorfizmu $f : X \to X$, który posiada n wartości własnych (liczonych z krotnościami, $n = \dim X$) istnieje baza przestrzeni X złożona z jego wektorów głównych**. Ponadto, z zależności (9.1) wynika, że jeżeli $v_\lambda^{(i)}$ jest wektorem głównym rzędu i ($i = 1, \dots, k$) odpowiadającym wartości własnej λ endomorfizmu f, to

$$\begin{aligned} f\left(v_\lambda^{(1)}\right) &= \lambda v_\lambda^{(1)}, \\ f\left(v_\lambda^{(2)}\right) &= \lambda v_\lambda^{(2)} + v_\lambda^{(1)}, \\ &\vdots \\ f\left(v_\lambda^{(k)}\right) &= \lambda v_\lambda^{(k)} + v_\lambda^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Tym samym endomorfizm f zawężony do przestrzeni liniowej rozpiętej przez wektory $v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}$ jest również endomorfizmem, tj.

$$f : \operatorname{span}\left\{v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}\right\} \ni x \to f(x) \in \operatorname{span}\left\{v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}\right\};$$

jego macierzą w bazie $v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}$ jest klatka Jordana stopnia k odpowiadająca wartości własnej λ. Oznacza to, że macierz endomorfizmu f w bazie złożonej z jego wektorów głównych jest macierzą Jordana. Bazę tę nazywamy **bazą Jordana** przestrzeni X względem endomorfizmu f.

Uwaga 9.1. *Czasami macierz Jordana defniuje się jako macierz blokową, której bloki – klatki Jordana to macierze kwadratowe, na przekątnej z wartościami własnymi i jedynkami pod przekątną (a nie nad przekątną, jak w przyjętej przez nas definicji 8.1). Aby uzyskać taką właśnie klatkę Jordana wystarczy wektory główne ponumerować tak, aby ostatni był pierwszym, a pierwszy ostatnim, tj.*

$$w_\lambda^{(i)} = v_\lambda^{(k-i+1)}, \quad \textit{dla } i = 1, \dots, k.$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} f\left(w_\lambda^{(1)}\right) &= f\left(v_\lambda^{(k)}\right) = \lambda v_\lambda^{(k)} + v_\lambda^{(k-1)} = \lambda w_\lambda^{(1)} + w_\lambda^{(2)}, \\ f\left(w_\lambda^{(2)}\right) &= f\left(v_\lambda^{(k-1)}\right) = \lambda v_\lambda^{(k-1)} + v_\lambda^{(k-2)} = \lambda w_\lambda^{(2)} + w_\lambda^{(3)}, \\ &\vdots \\ f\left(w_\lambda^{(k)}\right) &= f\left(v_\lambda^{(1)}\right) = \lambda v_\lambda^{(1)} = \lambda w_\lambda^{(k)} \end{aligned}$$

zatem klatka Jordana ma w tym przypadku postać:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

9.2. Macierz przejścia

Niech X będzie n–wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{F}$. Niech $e = (e_1, \ldots, e_n)$ oraz $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ będą dwiema bazami przestrzeni X. Każdy wektor bazy $\tilde{e}$ możemy wyrazić jako kombinację liniową wektorów bazy e:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \ldots + p_{n1}e_n, \\ \tilde{e}_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \ldots + p_{n2}e_n, \\ &\vdots \\ \tilde{e}_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \ldots + p_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Otrzymaną w ten sposób macierz współczynników $P = [p_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ nazywamy **macierzą przejścia** ze *starej* bazy e do *nowej* bazy $\tilde{e}$. Zanotujmy, że i–tą kolumnę macierzy przejścia tworzą współrzędne i–tego wektora nowej bazy jako kombinacji liniowej wektorów starej bazy. Macierz przejścia jest więc macierzą endomorfizmu

$$\mathrm{id}_X : \mathrm{span}\{\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n\} \ni x \to x \in \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_n\}.$$

Dowolny element $x \in X$ możemy wyrazić jako kombinację liniową elementów bazy e, jak również bazy $\tilde{e}$. Poszukamy teraz zależności między tymi reprezentacjami. Mamy

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \quad \text{oraz} \quad x = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \tilde{e}_j. \tag{9.4}$$

Wykorzystując macierz przejścia mamy:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \tilde{\alpha}_j \right) e_i.$$

Stąd oraz z postaci rozwinięcia wektora x względem bazy e wynika zależność między współrzędnymi wektora względem starej oraz nowej bazy:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \ddots & & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_n \end{bmatrix}. \tag{9.5}$$

Zależność tę możemy ująć krótko:

$$\alpha = P\tilde{\alpha}, \tag{9.6}$$

gdzie α (odpowiednio $\tilde{\alpha}$) to wektor współrzędnych x względem starej (nowej) bazy, a P to macierz przejścia z pierwszej bazy do drugiej. Zauważmy również, że z równania (9.6) wynika:

$$\tilde{\alpha} = P^{-1}\alpha,$$

co oznacza, że macierzą przejścia z bazy nowej to starej jest macierz P^{-1}.

Przykład 9.3. *Rozważmy w $\mathbb{R}^2$ dwie bazy: starą $e_1 = (1,2)\,, e_2 = (0,1)$ oraz nową $\tilde{e}_1 = (1,1)\,,$ $\tilde{e}_2 = (-1,1)\,.$ Wyznaczymy macierz przejścia z bazy starej do nowej. Mamy*

$$\begin{aligned}\tilde{e}_1 &= (1,1) = p_{11}\,(1,2) + p_{21}\,(0,1) = (p_{11}, 2p_{11} + p_{21})\\ \tilde{e}_2 &= (-1,1) = p_{12}\,(1,2) + p_{22}\,(0,1) = (p_{12}, 2p_{12} + p_{22})\end{aligned}$$

skąd wynika, że: $p_{11} = 1, p_{21} = -1, p_{12} = -1, p_{22} = 3$. Macierz przejścia ma więc postać:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Niech teraz $(2,1)$ będzie wektorem wyrażonym w starej bazie. Wyznaczymy jego współrzędne w nowej bazie. Mamy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Aby sprawdzić poprawność wyniku przedstawimy obydwa wektory w tej samej bazie kanonicznej k: $k_1 = (1,0)\,, k_2 = (0,1)$:

$$\begin{aligned}(2,1)_e &= 2e_1 + e_2 = 2\,(1,2) + (0,1) = (2,5)_k\\ (7/2, 3/2)_{\tilde{e}} &= \frac{7}{2}\tilde{e}_1 + \frac{3}{2}\tilde{e}_2 = \frac{7}{2}\,(1,1) + \frac{3}{2}\,(-1,1) = (2,5)_k\,.\end{aligned}$$

9.3. Zmiana bazy, a postać macierzy odwzorowania liniowego

Na zakończenie tego rozdziału zbadamy jak zmienia się macierz odwzorowania liniowego wraz ze zmianą baz przestrzeni między którymi to odwzorowanie jest określone.

Niech $f : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech $\dim X = n$, $\dim Y = m$. Przyjmując w przestrzeni X bazę $e = (e_1, \ldots, e_n)$, a w przestrzeni Y bazę $g = (g_1, \ldots, g_m)$, odwzorowanie f reprezentowane jest przez macierz $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, tj.

$$y = Ax. \tag{9.7}$$

Ustalając w przestrzeni X nową bazę $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ możemy wyznaczyć macierz przejścia z bazy e do bazy $\tilde{e}$; oznaczmy ją przez P. Oczywiście $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Podobnie, dokonując zmiana bazy w przestrzeni Y z g na $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m)$ możemy wyznaczyć macierz przejścia $Q \in \mathbb{F}^{m\times m}$ z bazy g do $\tilde{g}$. Niech $\tilde{x}$ (odpowiednio $\tilde{y}$) będą współrzędnymi wektorów x (odp. y) w nowych bazach przestrzeni X i Y. Otrzymujemy

$$x = P\tilde{x} \quad \text{oraz} \quad y = Q\tilde{y}.$$

Łącząc powyższe zależności z równaniem (9.7) mamy

$$Q\tilde{y} = AP\tilde{x},$$

lub równoważnie

$$\tilde{y} = Q^{-1}AP\tilde{x}.$$

Oznacza to, że w nowych bazach przestrzeni X oraz Y odwzorowanie f reprezentowane jest przez macierz $Q^{-1}AP$. W szczególności, **jeżeli $f : X \to X$ jest endomorfizmem reprezentowanym przez macierz A wyznaczoną w bazie e przestrzeni X, to macierzą tego endomorfizmu w bazie $\tilde{e}$ jest macierz $P^{-1}AP$, gdzie P jest macierzą przejścia z baze e do bazy $\tilde{e}$.**

9.3.1. Baza złożona z wektorów własnych

Rozważmy endomorfizm $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$, gdzie $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; przestrzeń wektorową $\mathbb{F}^n$ rozważamy nad ciałem $\mathbb{F}$. Przypuśćmy, że endomorfizm f jest diagonalizowalny. Oznacza to, że istnieje baza v przestrzeni $\mathbb{F}^n$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu f. Niech A będzie macierzą tego endomorfizmu w wybranej bazie przestrzeni $\mathbb{F}^n$. Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli P jest macierzą przejścia z wybranej bazy przestrzeni $\mathbb{F}^n$ do bazy v, to w tej nowej bazie endomorfizm f jest reprezentowany przez macierz diagonalną $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, gdzie λ_i jest wartością własną endomorfizmu f odpowiadającą wektorowi własnemu v_i $(i = 1, \ldots, n)$. Macierzą ustalającą podobieństwo między macierzami A oraz $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ jest macierz P, tzn.

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Ponieważ i–tą kolumną macierzy P są współrzędne i–tego wektora bazy v względem starej bazy przestrzeni $\mathbb{F}^n$, zatem wybierając jako tę starą bazę bazę kanoniczną, i–tą kolumną macierzy P są współrzędne i–tego wektora własnego endomorfizmu f, tzn. $P = [v_1, \ldots, v_n]$ (zob. przykład 7.5).

9.3.2. Baza Jordana

Jeżeli endomorfizm $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ nie jest diagonalizowalny to nie istnieje baza przestrzeni $\mathbb{F}^n$ złożona z jego wektorów własnych. Zawsze możemy natomiast wyznaczyć bazę przestrzeni $\mathbb{F}^n$ złożoną z jego wektorów głównych. Oznaczmy tę bazę przez v. Wiemy, że w bazie tej macierz endomorfizmu f ma postać Jordana. Jeżeli A jest macierzą ednomorfizmu f w innej bazie, a P jest macierzą przejścia z tej bazy do bazy złożonej z wektorów głównych, to wówczas

$$P^{-1}AP = J,$$

gdzie J jest macierzą Jordana endomorfizmu f. Wybierając jako tę starą bazę bazę kanoniczną, i–tą kolumną macierzy P są współrzędne i–tego wektora głównego endomorfizmu f (zob. przykład 9.2).

Na zakończenie rozważmy następujący

Przykład 9.4. *Niech $D : \pi_3 \to \pi_3$ będzie endomorfizmem określonym wzorem*

$$D(f) = f'.$$

Wybierając w przestrzeni π_3 bazę $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2$, $e_4 = x^3$, otrzymujemy:

$$D(e_1) = 0,\ D(e_2) = e_1,\ D(e_3) = 2e_2,\ D(e_4) = 3e_3.$$

W bazie e_1, e_2, e_3, e_4 przestrzeni π_3 macierz A endomorfizmu D ma więc postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = \lambda^4$ zatem $\lambda_0 = 0$ jest jedyną wartością własną macierzy A (endomorfizmu D). Ponieważ

$$\dim\ker(A - \lambda_0 I) = \dim\ker A = 4 - \operatorname{rank} A = 1,$$

zatem dla macierzy A istnieje tylko jeden liniowo niezależny wektor własny postaci $(t,0,0,0)$. Macierz A nie jest więc diagonalizowalna. Wyznaczymy jej wektory główne. Dla ustalonego $t \neq 0$, mamy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika: $x = r, y = t,\ z = w = 0$, gdzie $r \in \mathbb{R}$. Tym samym $v^{(2)} = (r,t,0,0)$ jest wektorem głównym rzędy 2. Podobnie, dla ustalonych $t \neq 0$ oraz $r \in \mathbb{R}$, mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika: $x = s, y = r, z = \frac{1}{2}t, w = 0$, gdzie $s \in \mathbb{R}$. Tym samym $v^{(3)} = \left(s, r, \frac{1}{2}t, 0\right)$ jest wektorem głównym rzędy 3. Musimy wyznaczyć jeszcze wektor główny rzędu 4. Mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ r \\ \frac{1}{2}t \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że $x = p, y = s, z = \frac{1}{2}r, w = \frac{1}{6}t$, gdzie $t \neq 0$ oraz $p, s, r \in \mathbb{R}$. Ustalając $p = s = 1$, $r = 2, t = 6$ otrzymujemy cztery liniowo niezależne wektory główne macierzy A

$$\begin{aligned} v^{(1)} &= (6,0,0,0)\,, \\ v^{(2)} &= (2,6,0,0)\,, \\ v^{(3)} &= (1,2,3,0)\,, \\ v^{(4)} &= (1,1,1,1)\,. \end{aligned}$$

Odpowiadają one czterem wektorom głównym endomorfizmu D:

$$v_1(x) = 6,\ v_2(x) = 2 + 6x,\ v_3(x) = 1 + 2x + 3x^2,\ v_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Łatwo stwierdzić, że macierz

$$P = \left[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}\right] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą przejścia z bazy e_1, e_2, e_3, e_4 do bazy złożonej z wektorów głównych endomorfizmu D. Faktycznie,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J.$$

Macierz Jordana J jest macierzą endomorfizmu D w bazie złożonej z jego wektorów głównych.

Rozdział 10

Formy kwadratowe

Rozważmy rzeczywistą macierz symetryczną $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Definicja 10.1. *Funkcję* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *postaci*

$$h(x) = x^T Ax \tag{10.1}$$

nazywamy **formą kwadratową**. *Macierz symetryczną* A *występującą w powyższym równaniu nazywamy macierzą formy kwadratowej* h.

Uwaga 10.1. *Zauważmy, że wyrażenie* $x^T Ax$ *ma sens również w przypadku dowolnej kwadratowej macierzy niesymetrycznej. Okazuje się jednak, że formę kwadratową zdefiniowaną przez dowolną macierz niesymetryczną zawsze można równoważnie zdefiniować przez macierz symetryczną. Faktycznie,*

$$x^T Ax = x^T \left(\frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}\right) x = x^T \frac{A + A^T}{2} x + x^T \frac{A - A^T}{2} x,$$

ale

$$x^T \frac{A - A^T}{2} x = \frac{1}{2}\left(x^T Ax - x^T A^T x\right) = \frac{1}{2}\left(x^T Ax - \left(x^T A^T x\right)^T\right) = \frac{1}{2}\left(x^T Ax - x^T Ax\right) = 0,$$

zatem

$$x^T Ax = x^T \frac{A + A^T}{2} x.$$

Macierz $\frac{A+A^T}{2}$ *jest już macierzą symetryczną.*

Przyjmując $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, wzór (10.1) możemy równoważnie wyrazić w postaci

$$h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Przykład 10.1. *Odwzorowania*

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

oraz

$$h_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

są formami kwadratowymi o macierzach

$$A_{h_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad A_{h_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odwzorowania

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2 \quad \text{oraz} \quad g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1$$

nie są formami kwadratowymi.

10.1. Określoność formy kwadratowej

W klasie wszystkich form kwadratowych szczególną rolę odgrywają formy określone.

Definicja 10.2. *Formę kwadratową $h(x) = x^T Ax$ nazywamy*

- *dodatnio określoną, jeżeli*
$$x^T Ax > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$
- *ujemnie określoną, jeżeli*
$$x^T Ax < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$
- *dodatnio półokreśloną, jeżeli*
$$x^T Ax \geqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$
- *ujemnie półokreśloną, jeżeli*
$$x^T Ax \leqslant 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$
- *nieokreśloną, jeżeli nie zachodzi żaden z powyższych warunków.*

Przykład 10.2. *Rozważmy ponownie formę kwadratową*

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

Ponieważ $h_1(1, 0, 0) = -1$ oraz $h_1(0, 1, 0) = 1$, zatem forma kwadratowa h_1 jest nieokreślona. Forma kwadratowa

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

jest dodatnio określona; z kolei forma

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2$$

jest półokreślona dodatnio (dlaczego?).

10.2. Metody badania określoności formy kwadratowej

Poniżej przedstawione zostaną (bez dowodów) najczęściej stosowane metody badania określoności form kwadratowych.

10.2.1. Kryterium Sylvestera

Twierdzenie 10.1. *Forma kwadratowa $h(x) = x^T Ax$, gdzie $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jest:*

– *dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące macierzy A są dodatnie:*

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad (j = 1, \ldots, n);$$

– *ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(-1)^j D_j = (-1)^j \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Przykład 10.3. *Dla formy kwadratowej*

$$h(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2$$

mamy:

$$h(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3] \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$D_1 = 3 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

zatem forma kwadratowa h jest dodatnio określona.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że z warunków $D_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ nie wynika dodatnia półokreśloność formy kwadratowej $h(x) = x^T Ax$.

Przykład 10.4. *Dla formy kwadratowej*

$$h(x_1, x_2) = [x_1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_2^2$$

mamy $D_1 \geqslant 0$ oraz $D_2 \geqslant 0$, podczas gdy forma kwadratowa h jest ujemnie półokreślona.

Twierdzenie 10.2. *Forma kwadratowa $h(x) = x^T Ax$, gdzie $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, jest:*

– *dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne, tj.*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_p} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i_pi_1} & a_{i_pi_2} & \cdots & a_{i_pi_p} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

dla $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant n$;

– *ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(-1)^p \begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_p} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i_pi_1} & a_{i_pi_2} & \cdots & a_{i_pi_p} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

dla $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, $1 \leqslant p \leqslant n$.

Przykład 10.5. *Dla formy kwadratowej*

$$h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

mamy

- *trzy minory główne stopnia jeden:* $a_{11} = -1$, $a_{22} = -2$, $a_{33} = -2$;
- *trzy minory główne stopnia dwa:*

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0;$$

- *jeden minor główny stopnia trzy:*

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Z twierdzenia 11.2 wynika, że forma kwadratowa h jest ujemnie półokreślona.

10.2.2. Kryterium wartości własnych

Można udowodnić, że rzeczywista macierz symetryczna A ma rzeczywiste wartości własne. Niech $v = (v_1, \ldots, v_n)^T$ będzie wektorem własnym macierzy A odpowiadającym jej wartości własnej $\lambda(A)$ oraz przypuśćmy, że forma kwadratowa $h(x) = x^T A x$ jest dodatnio określona. Wówczas

$$0 < v^T A v = v^T \lambda(A) v = \lambda(A) v^T v = \lambda(A) \sum_{i=1}^{n} v_i^2, \tag{10.2}$$

a stąd $\lambda(A) > 0$. Oznacza to, że jeżeli forma kwadratowa jest dodatnio określona to jej macierz ma dodatnie wartości własne. Łatwo o podobne zależności dla form określonych ujemnie oraz półokreślonych.

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 10.3. *Niech* $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ *będą wartościami własnymi macierzy* $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. *Wówczas forma kwadratowa* $h(x) = x^T A x$ *jest*

– *dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) > 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

– *ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) < 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

– *dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n);$$

– *ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lambda_i(A) \leqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Przykład 10.6. *Rozważmy formę kwadratową h z przykładu 11.5:*

$$h(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{10.3}$$

Jej macierz ma trzy rzeczywiste wartości własne $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$. Z twierdzenia 11.3 wynika, że forma kwadratowa (10.3) jest ujemnie półokreślona.

10.2.3. Sprowadzenie do postaci kanonicznej (metoda Lagrange'a)

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 10.4. *Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ istnieje macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dla której macierz P^TAP jest diagonalna. Innymi słowy, dla każdej formy kwadratowej*

$$h(x) = x^TAx$$

istnieje nieosobliwe przekształcenie liniowe $x = Py$, dla którego forma kwadratowa $h(Py) = y^TP^TAPy$ przyjmuje postać kanoniczną, tj.

$$h(Py) = c_1y_1^2 + \ldots + c_ny_n^2, \tag{10.4}$$

dla pewnych skalarów $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Zauważmy, że forma kwadratowa zapisana w postaci kanonicznej (10.4) jest:

- dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;
- ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;
- dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$;
- ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Metoda Lagrange'a Formę kwadratową

$$h(x) = x^TAx = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

możemy zapisać w postaci

$$h(x_1, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \ldots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n).$$

Rozważmy trzy przypadki:

- $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Wówczas $h(x) \equiv 0$, tzn. forma kwadratowa jest jednocześnie ujemnie oraz dodatnio półokreślona;

- $a_{ii} = 0$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz istnieją indeksy k, l dla których $a_{kl} \neq 0$. Niech e_k oraz e_l będą odpowiednio k-tym oraz l-tym wektorem bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $v^+ = e_k + e_l$ oraz $v^- = e_k - e_l$. Wówczas

$$\begin{aligned} h\left(v^+\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i^+ v_j^+ = 2a_{kl} \\ h\left(v^-\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i^- v_j^- = -2a_{kl} \end{aligned}$$

  skąd wynika, że w rozważanym przypadku forma kwadratowa h jest nieokreślona;
- $a_{ii} \neq 0$ dla pewnego indeksu i; bez straty ogólności możemy przyjąć, że $i = 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} h\left(x_1, \dots, x_n\right) &= a_{11} x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{n} a_{1j} x_j + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11}\left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j\right) + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j \\ &= a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j\right)^2 - a_{11}\left(\sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j\right)^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

  Do formy kwadratowej h możemy teraz zastosować zamianę zmiennych:

$$\left\{ \begin{aligned} y_1 &= x_1 + \sum_{j=2}^{n} \tfrac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \\ &\vdots \\ y_n &= x_n \end{aligned} \right. \qquad \text{lub równoważnie} \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= y_1 - \sum_{j=2}^{n} \tfrac{a_{1j}}{a_{11}} y_j \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 \\ &\vdots \\ x_n &= y_n \end{aligned} \right. . \tag{10.5}$$

  Równania (10.5) określają nieosobliwe przekształcenie liniowe postaci $x = Py$, gdzie

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  W wyniku zamiany zmiennych (10.5) otrzymujemy

$$h\left(x\right) = h\left(Py\right) = a_{11} y_1^2 + \tilde{h}\left(y_2, \dots, y_n\right),$$

  gdzie $\tilde{h}$ jest formą kwadratową zmiennych $y_2, \dots, y_n$, do której ponownie stosujemy przedstawione rozumowanie rugując systematycznie kolejne zmienne i sprowadzając ją do postaci kanonicznej (lub wcześniej stwierdzając jej nieokreśloność).

Przykład 10.7. *Rozważmy formę kwadratową*

$$h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

Stosując opisaną powyżej metodę Lagrange'a sprowadzimy ją do postaci kanonicznej. Mamy:

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 \\ &= -\left(x_1^2 - 2x_1x_2\right) + x_2^2 - 4x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2)^2 + 2\left(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2\right) - 2x_3^2 \\ &= -(x_1 - x_2)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2. \end{aligned}$$

Rozważana forma kwadratowa jest więc nieokreślona. Zauważmy ponadto, że dokonując zamiany zmiennych

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ \qquad x_3 = y_3 \end{cases} \quad \textit{lub równoważnie} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

która jest przekształceniem liniowym $x = Py$ o macierzy P postaci

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3) &= [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= [y_1 \ \ y_2 \ \ y_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= [y_1 \ \ y_2 \ \ y_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2. \end{aligned}$$

Jest to postać kanoniczna rozważanej formy kwadratowej ($c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -2$).

Rozdział 11

Przestrzenie unitarne

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 11.1 (iloczyn skalarny). *Funkcję $s : X \times X \to \mathbb{R}$ spełniającą warunki:*

(a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y, z \in X$:
$$s(\alpha x + \beta y, z) = \alpha s(x, z) + \beta s(y, z);$$

(b) $\forall x, y \in X$:
$$s(x, y) = s(y, x);$$

(c) $\forall x \in X$:
$$s(x, x) \geqslant 0 \quad oraz \quad s(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

nazywamy **iloczynem skalarnym**. *Parę (X, s) nazywamy* **przestrzenią unitarną**.

Iloczyn skalarny wektorów x, y będziemy również oznaczać jako $\langle x, y \rangle$ lub $x \circ y$.

Przykład 11.1. *Odwzorowanie*
$$(x_1, \ldots, x_n) \circ (y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \tag{11.1}$$
to naturalny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$.

Przykład 11.2. *Odwzorowanie*
$$s(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$
jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathcal{L}_2(a, b)$ tzw. funkcji całkowalnych z kwadratem, tj.
$$\mathcal{L}_2(a, b) = \left\{ f : (a, b) \to \mathbb{R} : \int_a^b f^2(x)\, dx < +\infty \right\}.$$

Przykład 11.3. *Odwzorowanie*
$$s(A, B) = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$$
jest iloczynem skalarnym w przestrzeni $\mathbb{R}^{m \times n}$.

11.1. Norma określona przez iloczyn skalarny

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową.

Definicja 11.2 (norma). *Funkcję* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *spełniającą warunki*

(a) $\forall x \in X$:

$$\|x\| \geqslant 0 \quad oraz \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

(b) $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|\,;$$

(c) $\forall x, y \in X$:

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

nazywamy **normą**. *Parę* $(X, \|\cdot\|)$ *nazywamy* **przestrzenią unormowaną**.

Warunki występujące w powyższej definicji to naturalne wymagania stawiane przed funkcją mierzącą długość wektorów.

Przykład 11.4. *Każda z poniższych par* $(X, \|\cdot\|)$ *jest przestrzenią unormowaną:*

a) $X = \mathbb{R}^n$ *z normą*

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2};$$

b) $X = \mathcal{C}_{[a,b]}$ *z normą*

$$\|f\| = \max\left\{|f(x)| : x \in [a,b]\right\};$$

c) $X = \mathbb{R}^{n \times n}$ *z normą*

$$\|A\| = \sqrt{\max\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma\left(A^T A\right)\right\}}.$$

Wykażemy teraz, że jeżeli w rzeczywistej przestrzeni liniowej X zdefiniowano iloczyn skalarny s to funkcja $\|\cdot\|_s : X \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$\|x\|_s := \sqrt{s(x,x)} \tag{11.2}$$

jest normą w X.

Zauważmy na początek, że na podstawie warunku (c) definicji 10.1, funkcja $\|\cdot\|_s$ jest dobrze określona – wartości $s(x,x)$ są nieujemne; ten sam warunek gwarantuje również, że punkt (a) definicji 10.2 jest spełniony. Ponieważ

$$\begin{aligned}\|\alpha x\|_s &= \sqrt{s(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha s(x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha s(\alpha x, x)} = \sqrt{\alpha^2 s(x,x)} \\ &= |\alpha|\sqrt{s(x,x)} = |\alpha| \cdot \|x\|_s\end{aligned}$$

zatem punkt (b) również zachodzi. Zanim uzasadnimy punkt (c), wykażemy następujące

Twierdzenie 11.1 (nierówność Schwarza). *Dla dowolnych wektorów* x, y *rzeczywistej przestrzeni liniowej wyposażonej w iloczyn skalarny* s *zachodzi*

$$|s(x,y)| \leqslant \|x\|_s \cdot \|y\|_s\,. \tag{11.3}$$

Dowód: Dla dowolnych ustalonych wektorów x, y rozważmy funkcję

$$\varphi(t) = s(x + ty, x + ty)$$

zmiennej $t \in \mathbb{R}$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $y \neq 0$. Z warunku (c) definicji 10.1 wynika, że

$$\varphi(t) \geqslant 0, \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}. \tag{11.4}$$

Ponieważ

$$\varphi(t) = t^2 s(y,y) + 2ts(x,y) + s(x,x)$$

zatem φ jest funkcją kwadratową, która – wobec warunku (11.4) – ma niedodatni wyróżnik, tj.

$$\triangle = 4s^2(x,y) - 4s(x,x)\,s(y,y) \leqslant 0,$$

lub równoważnie

$$s^2(x,y) \leqslant s(x,x)\,s(y,y).$$

Stąd wynika zależność (11.3). ■

Dla dowolnych $x, y \in X$ mamy więc

$$\begin{aligned} \|x+y\|_s^2 &= s(x+y,x+y) = s(x,x) + 2s(x,y) + s(y,y) \leqslant \\ &\leqslant s(x,x) + 2\sqrt{s(x,x)\,s(y,y)} + s(y,y) = \\ &= \left(\sqrt{s(x,x)} + \sqrt{s(y,y)}\right)^2 = \left(\|x\|_s + \|y\|_s\right)^2. \end{aligned}$$

Oznacza to, że wzór (11.2) definiuje normę w dowolnej przestrzeni unitarnej.

11.2. Ortogonalność

Z nierówności Schwarza wynika, że dla niezerowych wektorów x, y rzeczywistej przestrzeni X:

$$-1 \leqslant \frac{s(x,y)}{\|x\|_s \cdot \|y\|_s} \leqslant 1.$$

Wynika stąd, że iloraz $s(x,y) / (\|x\|_s \cdot \|y\|_s)$ jest kosinusem ściśle określonego kąta $\measuredangle(x,y)$:

$$\cos\measuredangle(x,y) = \frac{s(x,y)}{\|x\|_s \cdot \|y\|_s}, \quad \measuredangle(x,y) \in [0,\pi].$$

Na podstawie definicji przyjmujemy, że jest to kąt między wektorami x oraz y. Mamy więc

$$s(x,y) = \|x\|_s \cdot \|y\|_s \cdot \cos\measuredangle(x,y).$$

Definicja 11.3. *Dwa wektory nazywamy* **ortogonalnymi***, jeżeli ich iloczyn skalarny jest równy zero.*

Wektor zerowy jest jedynym wektorem prostopadłym do każdego wektora (również do siebie samego).

Przykład 11.5. *Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^3$ z naturalnym iloczynem skalarnym (zob. przykład 10.1). Dla wektorów $v_1 = \left(1, \sqrt{3}, 0\right), v_2 = (0,1,0)$ mamy*

$$\cos\varphi = \frac{s(v_1,v_2)}{\|v_1\|_s \cdot \|v_2\|_s} = \frac{1\cdot 0 + \sqrt{3}\cdot 1 + 0\cdot 0}{\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tym samym $\measuredangle(v_1,v_2) = \varphi = \frac{\pi}{6}$.

Przykład 11.6. *W przestrzeni $\pi_n(\mathbb{R})$ definiujemy funkcje:*

$$\begin{aligned} s_1(f,g) &= \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx, \\ s_2(f,g) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(-1)\,g^{(k)}(-1). \end{aligned}$$

Przestrzenie $(\pi_n(\mathbb{R}), s_1)$ *oraz* $(\pi_n(\mathbb{R}), s_2)$ *są przestrzeniami unitarnymi. Niech* $f(x) = 2x+1$ *oraz* $g(x) = 3x^2 - 3x + 1$. *Wówczas*

$$s_1(f,g) = \int_{-1}^{1} (2x+1)\left(3x^2 - 3x + 1\right) dx = \int_{-1}^{1} 6x^3 - 3x^2 - x + 1 dx = 0$$

oraz

$$s_2(f,g) = f(-1)\,g(-1) + f'(-1)\,g'(-1) + f''(-1)\,g''(-1) = -25.$$

Oznacza to, że rozważane wielomiany są ortogonalne w przestrzeni $(\pi_n(\mathbb{R}), s_1)$, *natomiast nie są ortogonalne w przestrzeni* $(\pi_n(\mathbb{R}), s_2)$.

11.3. Ortogonalizacja Grama–Schmidta

Rozważmy ciąg $v_1, \ldots, v_n$ wektorów rzeczywistej przestrzeni liniowej X wyposażonej w iloczyn skalarny s. Jeżeli

$$v_i \perp v_j \quad \text{dla} \quad i \neq j,$$

to mówimy, że ciąg $v_1, \ldots, v_n$ jest **ciągiem wektorów ortogonalnych**. Jeżeli dodatkowo $\|v_i\|_s = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, to ciąg ten nazywamy **ciągiem ortonormalnym**.

Przypuśćmy, że wektory $v_1, \ldots, v_n$ stanowią bazę przestrzeni X. Podamy teraz algorytm modyfikujący tę bazę w taki sposób, że nowo otrzymana baza $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ jest bazą ortonormalną przestrzeni X.

Twierdzenie 11.2 (algorytm Grama–Schmidta). *Niech ciąg* $v_1, \ldots, v_n$ *stanowi bazę rzeczywistej przestrzeni* X *wyposażonej w iloczyn skalarny* s. *Wówczas ciąg wektorów* $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ *określonych wzorami*

$$\tilde{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_s}, \; \tilde{v}_k = \frac{v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s(v_k, \tilde{v}_i)\,\tilde{v}_i}{\left\| v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s(v_k, \tilde{v}_i)\,\tilde{v}_i \right\|_s}, \quad k = 2, \ldots, n$$

jest taki, że:

a) *dla każdego* $k \in \{1, \ldots, n\}$: $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \operatorname{span}\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k\}$;
b) *ciąg* $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n$ *jest bazą ortonormalną przestrzeni* X.

Dowód: Dowód poprowadzimy przez indukcję względem n. Dla $n = 1$ twierdzenie jest prawdziwe, tj. $\|\tilde{v}_1\|_s = 1$ oraz $\operatorname{span}\{v_1\} = \operatorname{span}\{\tilde{v}_1\}$. Przypuśćmy więc, że układ $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{k-1}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$. Niech $v = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s(v_k, \tilde{v}_i)\,\tilde{v}_i$. Wykażemy teraz, że wektor v jest ortogonalny do wektorów $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{k-1}$. Mamy dla $j = 1, \ldots, k-1$:

$$\begin{aligned} s(v, \tilde{v}_j) &= s\left(v_k - \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} s(v_k, \tilde{v}_i)\,\tilde{v}_i, \tilde{v}_j\right) = s(v_k, \tilde{v}_j) - \textstyle\sum_{i=1}^{k-1} s(v_k, \tilde{v}_i)\, s(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) \\ &= s(v_k, \tilde{v}_j) - s(v_k, \tilde{v}_j) = 0. \end{aligned}$$

Zauważmy ponadto, że $v \neq 0$. W przeciwnym przypadku mielibyśmy

$$v_k \in \operatorname{span}\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{k-1}\} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$$

wbrew liniowej niezależności wektorów $v_1, \ldots, v_n$. Możemy więc przyjąć

$$\tilde{v}_k := \frac{v}{\|v\|_s} = \frac{v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s(v_k, \tilde{v}_i)\,\tilde{v}_i}{\left\| v_k - \sum_{i=1}^{k-1} s(v_k, \tilde{v}_i)\,\tilde{v}_i \right\|_s}.$$

Tym samym wektory $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k$ tworzą układ wektorów ortonormalnych oraz rozpinają tę samą przestrzeń co wektory $v_1, \ldots, v_k$. ∎

Przykład 11.7. *Niech* $X = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+2y+3z+w=0, x+y+z=0\right\}$. *Łatwo stwierdzić, że*

$$X = \{(-y-z, y, z, -y-2z) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Jest to więc podprzestrzeń liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^4$*, a ponieważ*

$$(-y-z, y, z, -y-2z) = y\,(-1,1,0,-1) + z\,(-1,0,1,-2)$$

zatem jej bazą są wektory $e_1 = (-1,1,0,-1)\,, e_2 = (-1,0,1,-2)$. *Wyznaczymy bazę ortonormalną przestrzeni* X *w sensie naturalnego iloczynu skalarnego indukowanego z przestrzeni* $\mathbb{R}^4$. *Z twierdzenia 11.2 wynika, że szukana baza* $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ *może być wyznaczona ze wzorów*

$$\tilde{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \quad \tilde{e}_2 = \frac{e_2 - (e_2 \circ \tilde{e}_1)\,\tilde{e}_1}{\|e_2 - (e_2 \circ \tilde{e}_1)\,\tilde{e}_1\|}.$$

Ponieważ $\|e_1\| = \sqrt{e_1 \circ e_1} = \sqrt{3}$, *zatem* $\tilde{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,(-1,1,0,-1)$. *Podobnie, ponieważ*

$$e_2 - (e_2 \circ \tilde{e}_1)\,\tilde{e}_1 = (-1,0,1,-2) - \left((-1,0,1,-2) \circ \frac{\sqrt{3}}{3}\,(-1,1,0,-1)\right)\frac{\sqrt{3}}{3}\,(-1,1,0,-1) =$$
$$= (-1,0,1,-2) - (-1,1,0,-1) = (0,-1,1,-1)$$

więc

$$\tilde{e}_2 = \frac{(0,-1,1,-1)}{\sqrt{(0,-1,1,-1) \circ (0,-1,1,-1)}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,(0,-1,1,-1)\,.$$

Wektory

$$\tilde{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,(-1,1,0,-1)\,, \qquad \tilde{e}_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\,(0,-1,1,-1)$$

są bazą ortonormalną przestrzeni X.

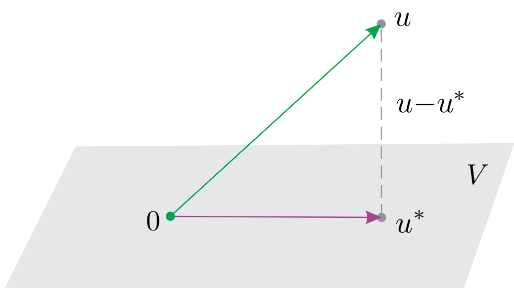
11.4. Rzut prostopadły na podprzestrzeń liniową

Niech V będzie n-wymiarową podprzestrzenią liniową rzeczywistej przestrzeni unitarnej (X,s). Rozważmy dowolny wektor $u \in X \backslash V$.

Definicja 11.4 (rzut ortogonalny). *Wektor* $u^* \in V$ *spełniający warunek*

$$\forall v \in V: \quad u - u^* \perp v \tag{11.5}$$

nazywamy **rzutem ortogonalnym wektora** u **na podprzestrzeń** V.



Wykres 3. Rzut ortogonalny wektora u na podprzestrzeń liniową V.

Przypuśćmy, że wektory $u_1, \ldots, u_n$ są bazą podprzestrzeni V. Warunek (11.5) równoważny jest wówczas warunkowi

$$u - u^* \perp u_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11.6}$$

Ponieważ $u^* \in V$ zatem istnieją skalary $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ dla których

$$u^* = \alpha_1^* u_1 + \ldots + \alpha_n^* u_n.$$

Aby wyznaczyć rzut ortogonalny u^* wektora u wystarczy więc wyznaczyć jego współrzędne $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ względem dowolnej bazy przestrzeni V. Zależność (11.6) oznacza, że dla $i = 1, \ldots, n$:

$$0 = s(u - u^*, u_i) = s(u - \textstyle\sum_{k=1}^n \alpha_k^* u_k, u_i) = s(u, u_i) - \textstyle\sum_{k=1}^n \alpha_k^* s(u_k, u_i),$$

lub równoważnie

$$\textstyle\sum_{k=1}^n s(u_i, u_k)\, \alpha_k^* = s(u, u_i).$$

Szukane wartości $\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ są więc rozwiązaniem układu równań liniowych

$$\begin{bmatrix} s(u_1, u_1) & \cdots & s(u_1, u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s(u_n, u_1) & \cdots & s(u_n, u_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^* \\ \vdots \\ \alpha_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(u, u_1) \\ \vdots \\ s(u, u_n) \end{bmatrix}. \tag{11.7}$$

Macierz $G = [s(u_i, u_j)]$ tego układu – tzw. **macierz Grama** – posiada wiele ważnych i interesujących własności. Można na przykład pokazać, że jej wyznacznik jest różny od zera wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $u_1, \ldots, u_n$ są liniowo niezależne (zob. zestaw 12, zad. 5). Postać macierzy G zależy od wyboru bazy przestrzeni V. W przypadku, gdy baza $u_1, \ldots, u_n$ jest bazą ortonormalną, macierz G jest macierzą jednostkową, a rozwiązaniem układu (11.7) są skalary

$$\alpha_i^* = s(u, u_i), \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Wynika stąd następujące

Twierdzenie 11.3. *Niech $u_1, \ldots, u_n$ będzie bazą ortonormalną podprzestrzeni V przestrzeni liniowej X wyposażonej w iloczyn skalarny s. Dla dowolnego wektora $u \in X$ istnieje dokładnie jeden wektor $u^* \in V$ będący rzutem ortogonalnym wektora u na podprzestrzeń V. Wektor ten określony jest wzorem:*

$$u^* = \sum_{i=1}^n s(u, u_i)\, u_i. \tag{11.8}$$

Przykład 11.8. *Wyznaczymy rzut ortogonalny wektora $u = (1, 1, 1, 1)$ na podprzestrzeń X przestrzeni $\mathbb{R}^4$ rozważaną w przykładzie 11.7 (z naturalnym iloczynem skalarnym). Przypomnijmy, że ortonormalną bazę X stanowią wektory*

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1, 1, 0, -1), \quad u_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(0, -1, 1, -1).$$

Poszukiwany wektor u^* wyznaczymy ze wzoru (11.8). Otrzymujemy

$$u^* = (u \circ u_1)\, u_1 + (u \circ u_2)\, u_2 = -\frac{1}{3}(-1, 1, 0, -1) - \frac{1}{3}(0, -1, 1, -1) = \frac{1}{3}(1, 0, -1, 2).$$

Rozdział 12

Elementy geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$

Elementy trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować co najmniej na trzy sposoby:

- jako zbiór punktów (x,y,z) (wykres 4a)); będziemy je oznaczać dużymi literami A, B, C itd. Liczby rzeczywiste x, y, z nazywamy współrzędnymi punktu $A = (x,y,z)$. Punkt nie jest wielkością wektorową – nie ma zwrotu, kierunku, długości.
- jako zbiór wszystkich wektorów zaczepionych $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{v}$ itd. (wykres 4b)). Wektory te mają wspólny początek w punkcie $O = (0,0,0)$. Każdy punkt $P = (x,y,z)$ wyznacza dokładnie jeden wektor zaczepiony $\overrightarrow{OP} = (x,y,z)$.
- jako zbiór wszystkich wektorów swobodnych $\overrightarrow{u}$, przy czym przez wektor swobodny $\overrightarrow{u}$ rozumiemy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w dowolnym punkcie, które mają tę samą długość, ten sam zwrot oraz ten sam kierunek co wektor $\overrightarrow{u}$ (wykres 4c)). Każde dwa różne punkty $A = (x_a, y_a, z_a)$ oraz $B = (x_b, y_b, z_b)$ wyznaczają dwa wektory swobodne
$$\overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) \quad \text{oraz} \quad \overrightarrow{BA} = (x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b)\,;$$
wektor $\overrightarrow{BA}$ nazywamy wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$. Punkt A (odpowiednio B) nazywamy początkiem (końcem) wektora $\overrightarrow{AB}$. Początek (koniec) danego wektora jest końcem (początkiem) wektora do niego przeciwnego.

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą dowolnymi wektorami oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wprowadzamy dwa naturalne działania: sumę wektorów

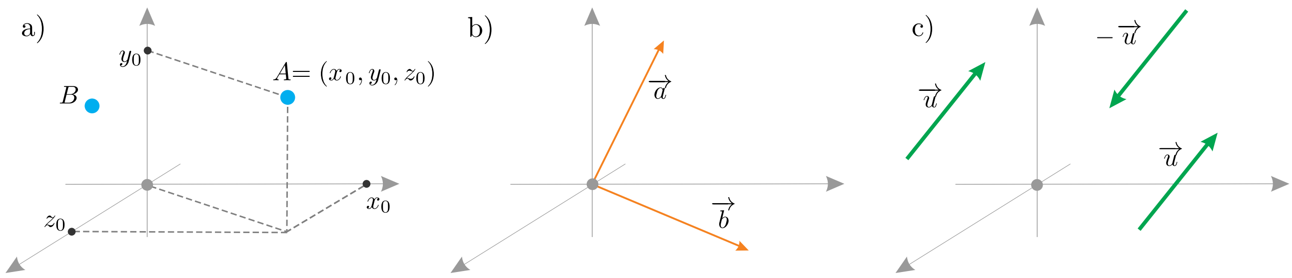
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \overset{df}{=} (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v)$$

oraz mnożenie wektora przez skalar:

$$\alpha \cdot \overrightarrow{u} \overset{df}{=} (\alpha x_u, \alpha y_u, \alpha z_u)\,.$$

Długość wektora $\overrightarrow{u}$ określamy wzorem:

$$\|\overrightarrow{u}\| \overset{df}{=} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}.$$



Wykres 4. Punkty, wektory zaczepione, wektory swobodne.

12.1. Iloczyny wektorów: skalarny, wektorowy, mieszany

12.1.1. Iloczyn skalarny

Rozważmy dwa wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 12.1 (iloczyn skalarny). *Iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ oraz $\vec{v}$ to liczba (skalar) $\vec{u} \circ \vec{v}$ określona wzorem*

$$\vec{u} \circ \vec{v} \overset{df}{=} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}), \tag{12.1}$$

gdzie $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$ to kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$; zakładamy, że $0 \leqslant \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) \leqslant \pi$.

Można wykazać, że jeżeli $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ to

$$\vec{u} \circ \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v. \tag{12.2}$$

Ze wzorów (12.1) oraz (12.2) wynika, że kąt między niezerowymi wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wyraża się wzorem

$$\measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \cdot \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}.$$

Własności iloczynu skalarnego

Dla dowolnych $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi

a) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$;
b) $\vec{u} \circ \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$;
c) $(\alpha \cdot \vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \circ \vec{v})$;
d) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$;
e) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (nierówność Schwarza);
f) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0$ (warunek ortogonalności wektorów).

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu skalarnego.

Układ współrzędnych

Układem współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy trzy ustalone wzajemnie prostopadłe proste, przecinające się w jednym punkcie zwanym początkiem układu współrzędnych. Zwyczajowo proste te oznacza się Ox, Oy oraz Oz i nazywa się osiami układu współrzędnych $Oxyz$. Początkiem układu współrzędnych jest zazwyczaj punkt $(0, 0, 0)$. Geometria analityczna to geometria *uprawiana* w wybranym układzie współrzędnych.

12.1.2. Iloczyn wektorowy

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą dowolnymi wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 12.2 (iloczyn wektorowy). *Iloczynem wektorowym wektorów $\overrightarrow{u}$ oraz $\overrightarrow{v}$ nazywamy wektor*

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u)\,. \tag{12.3}$$

Łatwo sprawdzić przez bezpośredni rachunek, że wzór (12.3) można wyrazić w postaci symbolicznego wyznacznika

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

gdzie $\overrightarrow{i} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{k} = (0,0,1)$. Można również wykazać, że

$$\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \sin\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, $\measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ to kąt między wektorami $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ $(0 \leqslant \measuredangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \leqslant \pi)$.

Własności iloczynu wektorowego

Dla dowolnych $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi

a) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$;
b) $(\alpha \cdot \overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \times (\alpha \cdot \overrightarrow{v}) = \alpha \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$;
c) $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$;
d) $|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$;
e) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \{\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \vee \overrightarrow{u} = 0 \vee \overrightarrow{v} = 0\}$ (warunek równoległości wektorów);
f) $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{v}$.

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu wektorowego.

Przykład 12.1. *Rozważmy trzy punkty*

$$A = (0,1,0)\,, \quad B = (1,0,1)\,, \quad C = (1,1,1)$$

będące wierzchołkami pewnego trójkąta. Obliczymy jego pole.

Zauważmy, że dwoma bokami trójkąt o wierzchołkach A, B, C są wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{AC}$; jego pole P wyraża się więc wzorem

$$P = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \sin\measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|.$$

Ponieważ

$$\overrightarrow{AB} = (1,-1,1)\,, \quad \overrightarrow{AC} = (1,0,1)\,,$$

zatem

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} = (-1,0,1)$$

i ostatecznie $P = \frac{\|(-1,0,1)\|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Orientacja układu współrzędnych

Rozróżniamy dwie orientacje układu współrzędnych $Oxyz$ – orientację dodatnią (układ prawoskrętny) oraz ujemną (układ lewoskrętny). Orientacja układu zależy od wzajemnego położenia osi układu Ox, Oy oraz Oz. Jeżeli wyprostowany kciuk prawej ręki umieścimy w ten sposób, aby wskazywał dodatnią część osi Oz, a zgięte palce wskażą kierunek obrotu od osi Ox do osi Oy (odpowiednio: od osi Oy do osi Ox) to wówczas mamy do czynienia z układem prawoskrętnym (lewoskrętnym).

Wykres 5. Orientacja układu współrzędnych: a) układ lewoskrętny, b) układ prawoskrętny.

Iloczyn wektorowy $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ dwóch niezerowych, niewspółliniowych wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma tę własność, że orientacja trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych $Oxyz$.

12.1.3. Iloczyn mieszany

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$ będą dowolnymi elementami przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 12.3 (iloczyn mieszany). *Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ nazywamy liczbę $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ określoną wzorem*

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \overset{df}{=} (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}. \tag{12.4}$$

Łatwo wykazać, że iloczyn mieszany wektorów jest wyznacznikiem macierzy, której wiersze (lub kolumny) są współrzędnymi tych wektorów, tj.:

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}. \tag{12.5}$$

Własności iloczynu mieszanego

Dla dowolnych $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \mathbb{R}^3$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi:

a) $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u})$;
b) $\alpha \cdot (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\alpha \cdot \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \alpha \cdot \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \alpha \cdot \overrightarrow{w})$;
c) $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) + (\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$;
d) $|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\|$.

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu mieszanego.

12.1.4. Zastosowanie geometryczne iloczynu wektorowego oraz mieszanego

Niech $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$. Iloczyny wektorowy oraz mieszany mają liczne interesujące zastosowania geometryczne. Można przy ich pomocy wyznaczać między innymi:

✓ **pole równoległoboku:** pole P_r równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem (zob. wykres 6a))

$$P_r = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|\,; \tag{12.6}$$

✓ **pole trójkąta:** pole P_t trójkąta rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem

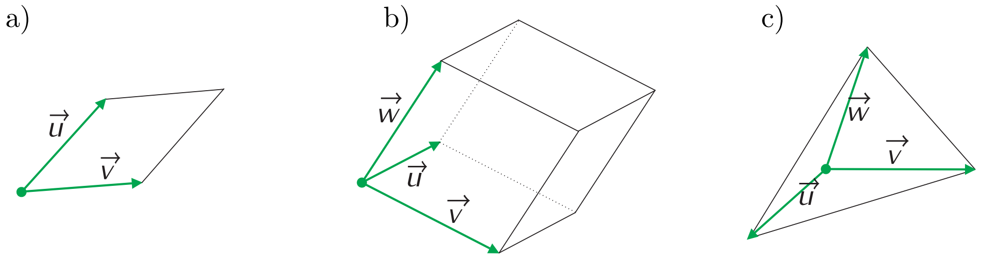
$$P_t = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|\,; \tag{12.7}$$

✓ **objętość równoległościanu:** objętość V_r równoległościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ wyraża się wzorem (zob. wykres 6b))

$$V_r = |(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|\,; \tag{12.8}$$

✓ **objętość czworościanu:** objętość V_c czworościanu wyznaczonego przez wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ wyraża się wzorem (zob. wykres 6c))

$$V_c = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|\,. \tag{12.9}$$



Wykres 6. Zastosowanie iloczynów wektorów: a) wektorowego; b) i c) mieszanego

Przykład 12.2. *W celu uzasadnienia wzoru (12.8) zauważmy, że*

$$\cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \frac{h}{\|\overrightarrow{w}\|},$$

gdzie h to długość wysokości poprowadzonej do podstawy rozpiętej przez wektory $\overrightarrow{u}$ oraz $\overrightarrow{v}$. Stąd, objętość V_r równoległościanu rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ to

$$V_r = P_p \cdot h = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,.$$

Zauważmy, że w ten sam sposób uzasadniamy wzór (12.9): objętość V_c czworościanu rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ to

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot h = \frac{1}{6} \cdot \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cdot \cos\measuredangle(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \\ &= \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})\,. \end{aligned}$$

Przykład 12.3. *Aby obliczyć długość h wysokości trójkąta o wierzchołkach w punktach*

$$A = (1,1,1)\,, \quad B = (2,2,2)\,, \quad C = (3,4,5)$$

opuszczonej z wierzchołka C, możemy zastosować wzór (12.7). Mamy $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)\,,\ \overrightarrow{AC} = (2,3,4)$ oraz

$$P = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \cdot h.$$

Ponieważ

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (1,-2,1)$$

zatem

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Przykład 12.4. *Aby obliczyć długość h wysokości czworościanu o wierzchołkach*

$$A = (0,0,0)\,, \quad B = (1,0,0)\,, \quad C = (0,2,3)\,, \quad D = (3,4,5)$$

opuszczonej z wierzchołka D, zastosujemy wzór (12.9). Mamy

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{3}h \cdot P_{\triangle ABC},$$

gdzie $P_{\triangle ABC}$ to pole trójkąta o wierzchołkach w punktach A, B, C. Mamy

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,0)\,, \quad \overrightarrow{AC} = (0,2,3)\,, \quad \overrightarrow{AD} = (3,4,5)\,.$$

Zatem

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0,-3,2)\,.$$

Stąd oraz ze wzoru (12.7) wynika, że $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\|(0,-3,2)\| = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Ponieważ

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -2,$$

zatem ostatecznie otrzymujemy

$$h = \frac{1}{2}\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|}{P_{\triangle ABC}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

12.2. Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

12.2.1. Równanie normalne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ oraz prostopadłej do niezerowego wektora $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ ma postać

$$\pi: \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{12.10}$$

Jest to tzw. **równanie normalne** płaszczyzny; wektor $\overrightarrow{n}$ jest jej wektorem normalnym.

Łatwo stwierdzić, że równanie

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, również opisuje płaszczyznę − jej wektorem normalnym jest wektor $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ i przechodzi ona przez punkty $P_1 = \left(-\frac{D}{A}, 0, 0\right)$, $P_2 = \left(0, -\frac{D}{B}, 0\right)$, $P_3 = \left(0, 0, -\frac{D}{C}\right)$ (o ile oczywiście $ABC \neq 0$).

12.2.2. Równanie odcinkowe płaszczyzny

Równanie postaci

$$\pi: \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{12.11}$$

w którym $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nazywamy **równaniem odcinkowym** płaszczyzny π. Płaszczyzna opisana równaniem (12.11) przecina osie Ox, Oy oraz Oz układu współrzędnych $Oxyz$ w punktach równych odpowiednio $P_x = (a, 0, 0)$, $P_y = (0, b, 0)$, $P_z = (0, 0, c)$.

12.2.3. Równanie parametryczne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do dwóch niewspółliniowych (nieleżących na jednej prostej) wektorów $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w, z_w)$ ma postać:

$$\pi: \qquad \begin{cases} x = x_0 + rx_v + sx_w \\ y = y_0 + ry_v + sy_w \\ z = z_0 + rz_v + sz_w \end{cases}, \qquad \text{gdzie } r, s \in \mathbb{R}.$$

Jest to tzw. **równanie parametryczne** płaszczyzny.

12.2.4. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty

Każde trzy niewspółliniowe punkty P_1, P_2, P_3 wyznaczają dokładnie jedną płaszczyznę π, która je zawiera. Niech $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Punkt $P = (x, y, z)$ leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty P_1, P_2, P_3 wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{P_1P_2}$ oraz $\overrightarrow{P_1P_3}$ są liniowo zależne. **Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$**, można więc wyrazić w postaci:

$$\pi: \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{12.12}$$

12.3. Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

12.3.1. Równanie parametryczne prostej

Rozważmy dowolny punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niezerowy wektor $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v, z_v)$. Równanie

$$l : \quad \begin{cases} x = x_0 + tx_v \\ y = y_0 + ty_v \\ z = z_0 + tz_v \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R} \tag{12.13}$$

jest **równaniem prostej l przechodzącej przez punkt P i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$**.

12.3.2. Równanie kierunkowe prostej

Przypuśćmy, że prosta l jest zapisana w postaci parametrycznej (12.13) oraz załóżmy, że żadna ze współrzędnych wektora $\overrightarrow{v}$ nie jest zerem. Wyliczając z każdego z trzech równań układu (12.13) parametr t, otrzymujemy **równanie kierunkowe** prostej:

$$l : \quad \frac{x - x_0}{x_v} = \frac{y - y_0}{y_v} = \frac{z - z_0}{z_v}. \tag{12.14}$$

12.3.3. Równanie krawędziowe prostej

Rozważmy dwie nierównoległe płaszczyzny

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{oraz} \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Częścią wspólną tych płaszczyzn jest prosta

$$l : \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}; \tag{12.15}$$

równanie (12.15) to jej **równanie krawędziowe**.

Zauważmy, że płaszczyzny π_1 oraz π_2 nie są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne $\overrightarrow{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ i $\overrightarrow{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$ nie są równoległe, tj. $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} \neq \overrightarrow{0}$. Wektor $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$ jest jednocześnie wektorem kierunkowym (równoległym) prostej l.

12.4. Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

12.4.1. Kąt między płaszczyznami oraz prostymi

Przyjmuje się, że kąt między dwiema prostymi (dwiema płaszczyznami) to kąt jaki tworzą wektory kierunkowe tych prostych (wektory normalne płaszczyzn). Kąt między prostą i płaszczyzną, to kąt $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to kąt ostry jaki tworzą wektor kierunkowy prostej oraz wektor normalny płaszczyzny. Znając wektory normalne płaszczyzn oraz wektory kierunkowe prostych, szukane kąty można łatwo wyliczyć wykorzystując stosowne własności iloczynu skalarnego lub iloczynu wektorowego tych wektorów.

12.4.2. Odległość punktu od płaszczyzny

Łatwo wykazać, że odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem

$$d\,(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{12.16}$$

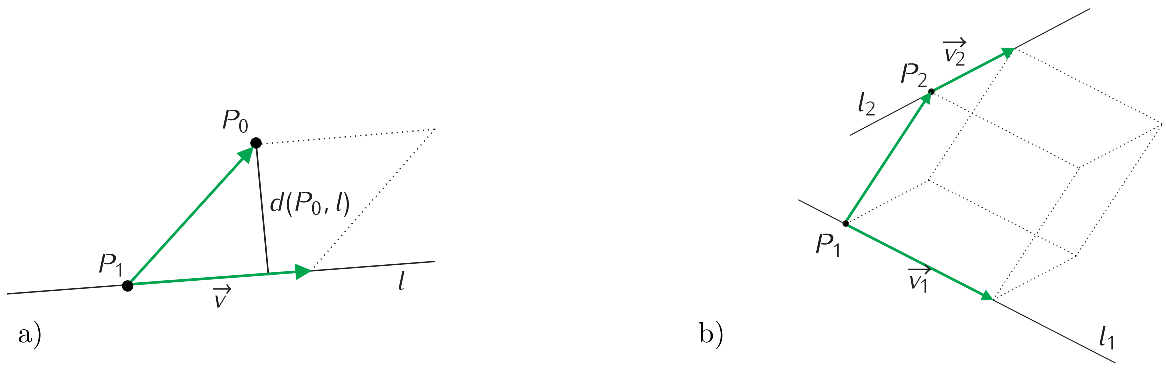
Ćwiczenie Uzasadnić powyższy wzór.

12.4.3. Odległość punktu od prostej

Można wykazać (zob. wykres 7a), że odległość punktu P_0 od prostej l przechodzącej przez punkt P_1 i równoległej do wektora $\overrightarrow{v}$ wyraża się wzorem

$$d\left(P_0, l\right) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_0} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}. \tag{12.17}$$

Ćwiczenie Uzasadnić powyższy wzór.



Wykres 7. Odległość punktu P_0 od prostej l (rys. a) oraz odległość między prostymi skośnymi l_1 i l_2 (rys. b).

12.4.4. Odległość między płaszczyznami

Rozważmy dwie płaszczyzny równoległe $\pi_1 : Ax+By+Cz+D_1 = 0$ oraz $\pi_2 : Ax+By+Cz+D_2 = 0$ (płaszczyzny równoległe mają ten sam wektor normalny). Ze wzoru (12.16) wynika natychmiast, że odległość między tymi płaszczyznami wyraża się wzorem

$$d\left(\pi_1, \pi_2\right) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

12.4.5. Odległość między prostymi

Niech l_1 (odpowiednio l_2) będzie prostą przechodzącą przez punkt P_1 (odpowiednio P_2) równoległą do wektora $\overrightarrow{v_1}$ (odpowiednio $\overrightarrow{v_2}$).

Proste równoległe

W przypadku, gdy proste l_1 i l_2 są równoległe (możemy wówczas przyjąć, że $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2}$), wzór na odległość między nimi wynika ze wzoru (12.17). Mamy

$$d\left(l_1, l_2\right) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{v_1}\|}{\|\overrightarrow{v_1}\|}.$$

Proste skośne

Jeżeli proste l_1 i l_2 nie są równoległe (tzn. $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \neq \overrightarrow{0}$; zob. wykres 7b), odległość między nimi obliczamy ze wzoru

$$d\left(l_1, l_2\right) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\right)\right|}{\|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}\|}.$$

Rozdział 13

Zadania egzaminacyjne

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 03.02.2011*

Zadanie 1. Wyznacz sumę rozwiązań równania:

$$(8z + 1 - i)^2 - 2^7 iz^4 = 0.$$

Zadanie 2. Niech $u_0 = (1, 2, 1)$. Rozważmy odwzorowanie

$$f : \mathbb{R}^3 \ni v \to u_0 \times v \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.
a) Uzasadnij, że f jest endomorfizmem.
b) Wyznacz jądro oraz obraz endomorfizmu f.

Zadanie 3. Rozważmy dwie macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sprawdź, czy macierze A i B są podobne.
b) Wyznacz macierz $I + A^2 + A^4 \ldots + A^{100}$.

Zadanie 4. Rozważmy podprzestrzeń liniową

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0,\ x - 2y + z = 0\right\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, -1, 1)$ na podprzestrzeń V. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ -1 & -a & 4 \end{pmatrix}$$

ma tylko nieujemne wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 10.02.2011*

Zadanie 1. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz zbiór:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leqslant \arg \frac{i}{(z+iz)^2} < \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Zadanie 2. W zbiorze $Z = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ wprowadzamy działanie $*$ określone wzorem $a * b = a + b - ab$. Sprawdź, czy struktura $(Z, *)$ jest grupą.

Zadanie 3. Wyznacz macierz Jordana endomorfizmu $F : \pi_2 \ni f \to f + f' \in \pi_2$.

Zadanie 4. Wyznacz wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których układ równań

$$\begin{cases} x + y = -a(1+y) \\ 2x + y = ax - 2 \\ 2x + ay = 1 - a \end{cases}$$

posiada niezerowe rozwiązanie.

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny macierzy

$$u^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

na podprzestrzeń

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Przyjmij iloczyn skalarny $[a_{ij}] \circ [b_{ij}] = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{ij}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 24.02.2011*

Zadanie 1. Dnia 10 lutego 2011 roku studenci pierwszego roku jednej z krakowskich uczelni zdawali pisemny egzamin z algebry liniowej. Każdy ze studentów uzyskał inną liczbę punktów. W grupie zdających wprowadzono dwa działania: r_1, które z dwóch osób wybiera tę, która uzyskałałepszy wynik z egzaminu oraz r_2, które z dwóch osób wybiera osobę młodszą (decyduje numer PESEL).

a) Sprawdź, czy struktura algebraiczna złożona z powyższej grupy studentów oraz działania r_1 jest grupą?

b) Sprawdź rozdzielność działania r_1 względem działania r_2.

Zadanie 2. Prosta $y = ax + b$ przecina wykres funkcji $y = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 3x - 7$ w pięciu różnych punktach $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$. Pokaż, że liczba $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$ nie zależy od parametrów a i b.

Zadanie 3. Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ będzie macierzą, taką że

$$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz $A^3 + \left(A^{-1}\right)^3$ jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Zbadaj, w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, wymiar obrazu endomorfizmu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$f(x, y, z) = \left(-2x + (-1-a)y + z, ax - az, -x + \left(a + a^2\right)y + z\right).$$

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1,2,3)$ na podprzestrzeń liniową $x + y + z = 0$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 03.02.2012*

Zadanie 1. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62$. Oblicz

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3}.$$

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}_*^{n\times m}$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach należących do zbioru $\mathbb{R}_* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. W zbiorze $\mathbb{R}_*^{n\times m}$ wprowadzamy działanie $\circ$ określone wzorem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{nm}b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Czy struktura $(\mathbb{R}_*^{n\times m}, \circ)$ jest grupą abelową? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. Spośród rozwiązań równania

$$\left(z^3 - 27i\right)\left(z^2 - (3+i)\,z + 2 + 2i\right) = 0$$

wybierz te, które należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Zadanie 4. Rozważmy odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ postaci

$$L(x, y, z) = (x + z, 3x + 2z, z).$$

Czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz A_L odwzorowania L jest diagonalna? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz tę bazę.

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathbb{R}^{3\times 3}$ iloczyn skalarny s określono wzorem:

$$s([a_{ij}], [b_{ij}]) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wektora

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

na podprzestrzeń $V = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A = A^T\right\}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 09.02.2012*

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

W zbiorze $V = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : (A - 6I)\,v = 0\right\}$ wprowadzamy działanie $\otimes$ określone wzorem

$$v_1 \otimes v_2 = (u_0 \times v_1) - (v_2 \times u_0),$$

gdzie $\times$ to iloczyn wektorowy. Sprawdź czy: a) działanie $\otimes$ jest wewnętrzne w zbiorze V; b) działanie $\otimes$ jest przemienne; c) działanie $\otimes$ posiada element neutralny. Czy struktura algebraiczna $(V, \otimes)$ jest grupą?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie

$$\left(\sqrt[4]{32}\left(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)z+1+i\right)^2+z^4=0$$

ze względu na niewiadomą $z\in\mathbb{C}$.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania poniższego układu równań

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ y+3z-3t=1 \\ x+y+z-t=1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a\in\mathbb{R}$, dla których macierz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-a^2 \\ 1 & 0 & 1+a^2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 5. Na rzeczywistej przestrzeni liniowej V:

$$V=\operatorname{span}\{\sin x,\cos x,x\sin x,x\cos x\}$$

określono odwzorowanie liniowe $\mathcal{L}:f\to f+f'$. Wyznacz $\ker\mathcal{L}$, $\operatorname{Im}\mathcal{L}$ oraz sprawdź, czy jest to endomorfizm na V; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz również jego rzeczywiste wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 24.02.2012*

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór $G=\left\{\left(t,2^t\right):t\in\mathbb{R}\right\}$ wraz z działaniem

$$h\left(\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\right)=\left(x_1+x_2+2,4y_1y_2\right)$$

tworzy grupę. Czy jest to grupa abelowa?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $z^6-2z^3+2=0$ ze względu na niewiadomą $z\in\mathbb{C}$.

Zadanie 3. Spośród wielomianów $v_1(x)=x^3+2x^2+x-1$, $v_2(x)=2x^3+4x^2-x-2$, $v_3(x)=x$, $v_4(x)=x^3+2x^2+x+1$ wyznacz te, które są liniowo niezależne; następnie uzupełnij je do bazy przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej cztery.

Zadanie 4. Czy macierze

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

są podobne? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz ustalającą to podobieństwo.

Zadanie 5. Wyznacz długość wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie A to punkt w którym prosta $l:\frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z-6}{3}$ przecina płaszczyznę $\pi:4(x+1)+2y+6z=0$, a B to rzut ortogonalny, w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$, wektora $u=(1,-1,6)$ na płaszczyznę $2x+y+3z=0$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 01.02.2013*

Zadanie 1. Wyznacz sumę oraz iloczyn wszystkich elementów zbioru $\sqrt[2013]{1+i}$.
Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x + p^2 y + z &= -p \\ x + y - pz &= p^2 \\ y + z &= 1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie? Zbadaj liczbę jego rozwiązań w pozostałych przypadkach.
Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ dla których funkcja

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2a & -4 \\ -2 & a-1 & 0 \\ 2a & 0 & 2-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$$

przyjmuje jedynie wartości nieujemne.
Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, 0, 0)$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 6y - z = 0, -x + 2y + z = 0, 3x + 2y - 3z = 0\right\}.$$

W przestrzeni V przyjmujemy naturalny iloczyn skalarny przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Zadanie 5. Niech $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Uzasadnij, że jeżeli dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi $A^n = \mathbf{0}_{2\times 2}$, to $A^2 = \mathbf{0}_{2\times 2}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 08.02.2013*

Zadanie 1. Uzasadnij, że punkty $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ stanowią wierzchołki trójkąta równobocznego o środku w punkcie $(0, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne spełniają następujące warunki:

$$\begin{array}{ll} a_1 + a_2 + a_3 = 0 & a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 - b_2b_3 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0 & a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 = 0 \end{array}.$$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $(z + a)^3 = i$ ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$; następnie zaznacz na płaszczyźnie zespolonej te wartości parametru $a \in \mathbb{C}$, dla których rozwiązania te należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \pi\right\}$.
Zadanie 3. Oblicz odległość punktu przecięcie się prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t, \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

od podprzestrzeni liniowej $V \subset \mathbb{R}^3$ rozpiętej przez wektory $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (2, 1, 0)$.
Zadanie 4. Rozważmy endomorfizm $F : \pi_2 \ni f \to f(0) + f(1)x + f(-1)x^2 \in \pi_2$, gdzie π_2 to rzeczywista (tj. nad ciałem $\mathbb{R}$) przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż dwa z naturalnymi działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar. Sprawdź, czy endomorfizm F jest diagonalizowalny; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz dla niego bazę Jordana przestrzeni π_2.
Zadanie 5. Rozważmy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (-1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)$ ortonormalną względem iloczynu skalarnego s. Wyznacz kąt, względem tego iloczynu skalarnego, pomiędzy wektorami $u = (1, 2, 3)$ oraz $w = (1, 1, 4)$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 19.02.2013*

Zadanie 1. Niech $\mathcal{T}_3$ oznacza zbiór macierzy trójkątnych górnych wymiaru 3×3 z jedynkami na przekątnej. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(\mathcal{T}_3, \cdot)$ jest grupą; działanie $\cdot$ to iloczyn macierzy.

Zadanie 2. Sprawdź, czy macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 3. Wyznacz wektory własne endomorfizmu

$$F : \pi_2 \ni f(x) \to -f(x) + f'(x) - f''(x) + f(0) \in \pi_2,$$

gdzie π_2 to rzeczywista przestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż dwa z naturalnymi działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

Zadanie 4. Wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 2$. Oblicz wyznacznik macierzy $A^3 + A^2 - A - I$.

Zadanie 5. Spośród wektorów

$$v_1 = (1, 3, 1, -1), v_2 = (2, 4, 0, -6), v_3 = (0, 2, 2, 4), v_4 = (0, 1, -1, -5)$$

wybierz bazę rzeczywistej przestrzeni wektorowej

$$V = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - 3z + w = 0, 2x - y + z = 0\right\};$$

następnie uzupełnij ją do bazy przestrzeni

$$W = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x - 2z + w = 0\right\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 04.02.2014*

Zadanie 1. W zbiorze $K = (0, +\infty)$ wprowadzamy działania:

$$a \oplus b = ab, \qquad a \odot b = a^{\ln b}.$$

Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(K, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4 - z^3 + (1 - i)z + i - 1 = 0.$$

Zadanie 3. Rozważmy odwzorowanie liniowe

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (-x + 3z, -3x - 4y - 3z, 9x + 5z) \in \mathbb{R}^3.$$

Sprawdź, czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu f; w przypadku pozytywnej odpowiedzi, wyznacz jego macierz w tej bazie.

Zadanie 4. Czy odwzorowanie $f : \pi_3 \to \pi_2$ określone wzorem

$$f(\varphi)(t) = (t + 1)\varphi''(t - 1) + \varphi'(t + 1)$$

jest liniowe? Jeżeli tak, wyznacz jego jądro oraz obraz.

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$) wektora $u = (2, 1, 2)$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 8y - \sqrt{2}z = 0, 2\sqrt{2}y - z = 0\right\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 11.02.2014*

Zadanie 1. Przedstaw graficznie zbiór tych parametrów $a \in \mathbb{C}$ dla których wszystkie rozwiązania równania

$$z^2 + 2(a + i)z + a^2 + 2ai - 1 - i = 0$$

należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Arg} z < -\frac{\pi}{2}\right\}$.

Zadanie 2. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_2 dla endomorfizmu $F : \pi_2 \to \pi_2$ określonego wzorem

$$F : at^2 + bt + c \to (4a + 4b)t^2 + (2b - 2c + a)t + a + 2b + 2c.$$

Zadanie 3. Suma wyrazów w każdym wierszu macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest równa s. Uzasadnij, że s jest wartością własną macierzy A oraz wyznacz odpowiadający tej wartości własnej wektor własny.

Zadanie 4. Rozważmy dwie bazy przestrzeni π_n:

$$e : \left\{e_0 = 1, e_1 = 1 + x, e_2 = x + x^2, e_3 = x^2 + x^3, \ldots, e_n = x^{n-1} + x^n\right\}$$

oraz

$$\widetilde{e} : \left\{\widetilde{e}_0 = x^n, \widetilde{e}_1 = x^n + 1, \widetilde{e}_2 = x^n + x, \widetilde{e}_3 = x^n + x^2, \ldots, \widetilde{e}_n = x^n + x^{n-1}\right\}.$$

Wyznacz macierz P^{-1}, gdzie P oznacza macierz przejścia od bazy e do bazy $\widetilde{e}$.

Zadanie 5. Wyznacz odległość prostej l od płaszczyzny π, jeżeli

$$l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \qquad \pi : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = -2 + t - 2s \\ z = 3 + 2t - s \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 18.02.2014*

Zadanie 1. Wyznacz liczbę tych elementów zbioru $\sqrt[2016]{2014i}$, które należą również do zbioru

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Zadanie 2. Sprawdź, czy macierz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna; następnie wyznacz macierz A^{2014}.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 - \alpha & -2 \\ 1 - \alpha & 1 & \alpha \\ -2 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

ma jedynie nieujemne wartości własne.

Zadanie 4. Wyznacz bazę jądra oraz bazę obrazu odwzorowania liniowego

$$F : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (x + y - z, 2y - 2z, x - y + z, 3x) \in \mathbb{R}^4.$$

Zadanie 5. W przestrzeni π_2 iloczyn skalarny $\circ$ określono wzorem

$$\left(a_1t^2 + b_1t + c_1\right) \circ \left(a_2t^2 + b_2t + c_2\right) := a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wielomianu $u(t) = (t-1)^2$ na podprzestrzeń

$$V = \{f \in \pi_2 : f\text{–funkcja parzysta}\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 03.02.2015*

Zadanie 1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

a) $A = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\left(z^4\right) - |z|^2 \operatorname{Im}\left(z^2\right) \leqslant 0\right\}$

b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arg}\left[(z - iz)^2\right] \leqslant 0\right\}$.

Zadanie 2. Niech A będzie macierzą kwadratową o elementach rzeczywistych.

a) Oblicz $\det(2A)$ wiedząc, że $\det(3A) = 54$ oraz $\det(4A) = 128$.

b) Jakie wartości może przyjąć wyznacznik macierza A, jeżeli

$$A^T\left(AA^T\right)^{-1}\left(AA^T\right)^T - \left(\det A^2\right)\left[(\det A)\,A\right]^T = 0.$$

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których podany układ równań ma niezerowe rozwiązanie:

$$\begin{cases} a^2x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 4z = a \end{cases}.$$

Zadanie 4. Wyznacz, o ile istnieją, te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ dla których macierze

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a-1 & b \\ -6 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & b-2 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

są podobne.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 10.02.2015*

Zadanie 1. Liczba $s_0 = 1 + i\sqrt{2}$ jest jednym z rozwiązań równania

$$s^6 - 2s^5 + 5s^4 - 4s^3 + 8s^2 - 4s + 6 = 0.$$

Wyznacz pozostałe rozwiązania tego równania oraz wybierz spośród nich te, które należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z \leq \pi\right\}$.

Zadanie 2. Wyznacz rzut ortogonalny, w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$, wektora $(1,1,1)$ na jądro odwzorowania liniowego

$$F : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (y - 2x + z, y - z, x - 2y + z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zadanie 3. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x - ay + z = 1 \\ -2x - y - z = 1 \\ 2x - y = 2 \\ -x - ay - 2z = 2 \end{cases}$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ będzie macierzą postaci

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Sprawdź, czy macierz A jest diagonalizowalna.
(b) Wyznacz A^{2015}.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 26.02.2015*

Zadanie 1.
(a) Rozwiąż równanie w zbiorze liczb zespolonych: $z^3 = -8\overline{z}$.
(b) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby zespolone z spełniające warunek $\left|z^2+4\right| > |z-2i|$.

Zadanie 2. Wyznacz macierz X spełniającą równanie

$$A + B^T(X^T)^{-1}A = \left[A^T\left((A^{-1}+B)^{-1}+I\right)\right]^T.$$

Zadanie 3. Rozważmy cztery punkty $A(0,1,0)$, $B(-1,2,1)$, $C(1,0,1)$, $D(1,-1,1)$. Wyznacz odległość pomiędzy prostymi l_{AB} oraz l_{CD} przechodzącymi odpowiednio przez punkty A, B oraz C, D.

Zadanie 4. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ 1-a & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ma jedynie nieujemne wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 29.01.2016*

Zadanie 1. Niech $z_0, z_1, \ldots, z_4$ będą pierwiastkami algebraicznymi stopnia 5 z 32. Oblicz

$$\sum_{k=0}^{4} |2i - z_k|^2.$$

Zadanie 2. Wielomian $\varphi_A(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A. Wyznacz wielomiany charakterystyczne macierzy: a) $2A - I$, b) $(A+2I)^T$, c) A^{-1}.

Zadanie 3. Niech

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 5 & 2 \\ b & -1 & 4 \end{pmatrix}, \ v_1 = (1,1,-1)^T.$$

Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których wektor v_1 jest wektorem własnym macierzy A. Następnie sprawdź, czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna.

Zadanie 4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z iloczynem skalarnym $\circ$ określonym wzorem

$$x \circ y = x^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie iloczynu skalarnego $\circ$) wektora $u = (1,3)^T$ na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez wektor $e = (1,1)^T$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 05.02.2016*

Zadanie 1. Wiedząc, że z jest liczbą zespoloną o argumencie głównym $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ oraz o module $|z| > 1$, znajdź argument główny liczby zespolonej $\frac{\overline{(-iz)}z^3}{1-|z|^2}$.

Zadanie 2. Wektory $y, v_2, v_3, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tworzą bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$, ortogonalną w sensie naturalnego iloczyny skalarnego $\circ$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (tj. $v \circ w = v^T w$). Niech $x \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym niezerowym wektorem.

(a) Pokaż, że wektory $x, v_2, v_3, \ldots, v_n$ są wektorami własnymi macierzy xy^T oraz wyznacz odpowiadające im wartości własne.

(b) Wykaż, że $\det\left(I_n - xy^T\right) = 1 - y^T x$.

Zadanie 3. Wyznacz liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2w = 1 \\ 2x + 4y + z - 2w = 2 \\ -x - 2y - 2z + 4w = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej $\varphi(x, y, z) = 2x^2 - 2xz + 2y^2 - 2yz + z^2$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 17.02.2016*

Zadanie 1. Czy zbiór liczb niewymiernych z dołączoną liczbą 1, z naturalnym działaniem mnożenia liczb tworzy grupę? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2. Rozważmy odwzorowanie liniowe

$$F : \pi_3 \ni ax^3 + bx^2 + cx + d \to (a + b - c)\, x^2 + (2b + d)\, x + 2c - b \in \pi_2.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wielomianu $u(x) = x^2 + 2x + 2$ na podprzestrzeń $\operatorname{Im} F$ (tj. na obraz odwzorowania F) przestrzeni π_2 wyposażonej w iloczyn skalarny $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$.

Zadanie 3. Wyznacz sumę wszystkich liczb zespolonych z spełniających równanie

$$z^3 = \left(-2 + 2\sqrt{3}i\right) \overline{z}.$$

Zadanie 4. Wykorzystując postać Jordana macierzy $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3i & 1 \end{pmatrix}$ wyznacz cztery różne macierze B spełniające równanie $B^2 = A$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 31.01.2017*

Zadanie 1. Czy zbiór $G = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : |\det A| = 1\}$ z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę? Czy jest to grupa abelowa? Odpowiedzi pozytywne uzasadnij, negatywną poprzyj stosownym przykładem.

Zadanie 2. Czy każda macierz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ spełniająca równanie $(A - I)^2 (A + 2I) = 0$ jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których obraz $\operatorname{Im} f$ odwzorowania liniowego

$$f : \mathbb{R}^4 \ni (x, y, z, w) \to (x + ay - z, 2x - 2y + aw, x - y - w) \in \mathbb{R}^3$$

tworzy płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ iloczyn skalarny zdefiniowano wzorem $A \circ B = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$, gdzie $\operatorname{tr}(\cdot)$ oznacza ślad macierzy. Wyznacz rzut ortogalny macierzy I_2 (tj. macierzy jednostkowej wymiaru 2×2) na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez macierze

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 07.02.2017*

Zadanie 1. Wykorzystując wzory Viète'a, znajdź wszystkie rozwiązania układu równań

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y + z = -1 - i \\ xy + xz + yz = 2 + i \\ xyz = -2 \end{array} \right. , \quad \text{w którym } x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Zadanie 2. Wyznacz macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ o wartościach własnych $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ oraz $\lambda_3 = 0$, którym odpowiadają wektory własne

$$v_{\lambda_1} = (1, 1, 1)^T, \quad v_{\lambda_2} = (1, 0, 1)^T, \quad v_{\lambda_3} = (1, -1, 0)^T.$$

W rozwiązaniu wykorzystaj postać Jordana poszukiwanej macierzy.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których nierówność

$$x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} x \geqslant y^T \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} y$$

jest prawdziwa dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 4. Niech $v, w \in \mathbb{R}^3$ będą wektorami spełniającymi warunek $v \circ v = w \circ w = 1$, $v \circ w = \frac{1}{2}$, gdzie $\circ$ oznacza naturalny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$. Wyznacz ortonormalną bazę podprzestrzeni liniowej rozpiętej przez wektory v oraz w.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 15.02.2017*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których dokładnie dwa rozwiązania równania $z^n = 1 + i\sqrt{3}$ należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}\right\}$. Wyznacz te rozwiązania.

Zadanie 2. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$, jeżeli $f(x_0) = x_0$. Wyznacz wszystkie punkty stałe odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2y + z, x + y - 3z, -x + 3y + z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \geqslant 0$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 + a \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & a & 4 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 4. Niech $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Oblicz:
(a) $\det(A+B)$ wiedząc, że $\det B^T A = 2$ oraz $\det\left(B^{-1}+A^{-1}\right) = -3$;
(b) $\det\left(A^T B^{-1} - I\right)$ wiedząc, że $\det\left(B^T - A\right) = 5$, $\det(-B) = -\det B \neq 0$ oraz $B^4 = B$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 29.01.2018*

Zadanie 1. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu $f(x) = x^3 - (1-i)x^2 - x - i$. Wyznacz $\mathfrak{Re}(w)$, gdzie

$$w = \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right)^{2018}.$$

Zadanie 2. Wiadomo, na podstawie twierdzenia Cayleya–Hamiltona, że wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej jest jej wielomianem zerującym. Wykorzystując ten fakt uzasadnij, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, dla których $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.

Zadanie 3. Sprawdź, czy istnieje baza przestrzeni π_2 (tj. wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż 2), w której macierzą endomorfizmu

$$F : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (2a-b)x^2 + 2bx + 2c + b \in \pi_2$$

jest macierz

$$A_F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 05.02.2018*

Zadanie 1. Liczby z_1, z_2, z_3, z_4 to pierwiastki algebraiczne czwartego stopnia z liczby $z = 20 + 18i$. Wyznacz

$$w = (1-z_1)^2 + (1-z_2)^2 + (1-z_3)^2 + (1-z_4)^2.$$

Zadanie 2. Niech $a \neq b$ będą dowolnymi elementami. W zbiorze $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$, gdzie f_1, f_2 to funkcje prowadzące z $\{a, b\}$ w $\{a, b\}$ postaci

$$f_1(x) = \begin{cases} a, & \text{dla } x = a \\ b, & \text{dla } x = b \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} b, & \text{dla } x = a \\ a, & \text{dla } x = b \end{cases},$$

wprowadzamy działanie $\circ$ składania odwzorowań, tj. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(\mathcal{F}, \circ)$ jest grupą abelową.

Zadanie 3. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_1 (tj. wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż jeden) dla endomorfizmu

$$F : \pi_1 \ni ax + b \to (3a-b)x + a + b \in \pi_1.$$

Sprawdź poprawność wyniku poprzez wyznaczenie macierzy reprezentującej endomorfizm F w uzyskanej bazie.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$) elementu $u = (6, 2, -4)^T$ na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez wektory

$$v_1 = (2, 0, -1)^T, \quad v_2 = (1, -5, 2)^T.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 3 – 12.02.2018*

Zadanie 1. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Podane liczby zespolone zapisz w postaci trygonometrycznej:

$$z_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n, \qquad z_2 = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n,$$
$$z_3 = (\sin\alpha + i\cos\alpha)^n, \qquad z_4 = (\sin\alpha - i\cos\alpha)^n.$$

Zadanie 2. Sprawdź, czy podane macierze są podobne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz P dla której $A = PBP^{-1}$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie miejsca zerowe wielomianu $\varphi(x) = x^6 + 1$; następnie przedstaw go jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego.

Zadanie 4. Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ będzie macierzą postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2a+1 & 3a \\ -1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz zbiór tych parametrów $a \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T A x \in \mathbb{R}$ przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1. – 31.01.2019*

Zadanie 1. Liczby s_1, s_2, s_3, s_4 to pierwiastki wielomianu

$$f(s) = -s^4 + (1+i)\, s^3 + is + 1.$$

Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniających warunek

$$\textstyle\sum_{k=1}^4 |\lambda + s_k|^2 < \sum_{k=1}^4 \left|\overline{\lambda} + s_k\right|^2.$$

Zadanie 2. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których zbiór

$$\left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = a\right\}$$

z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę.

Zadanie 3. Rozważmy endomorfizm $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (ax + y, 2y, bz - y) \in \mathbb{R}^3$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ to nieznane parametry. Dobierz je w ten sposób, aby endomorfizm f posiadał jedną potrójną wartość własną; następnie sprawdź, czy jest on wówczas diagonalizowalny.

Zadanie 4. W przestrzeni π_3 (π_k – przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej k) wprowadzamy iloczyn skalarny

$$\langle f, g\rangle = \textstyle\sum_{k=0}^3 f^{(k)}(0)\, g^{(k)}(0),$$

gdzie $h^{(k)}$ oznacza k-tą pochodną h, $h^{(0)} = h$. Wyznacz rzut ortogonalny elementu $u(x) = (x+1)^3$ na podprzestrzeń π_2.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2. – 06.02.2019*

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór rozwiązań równania $s^{2019} = 1$ z działaniem

$$h(s_1, s_2) = \overline{s_1 s_2}$$

tworzy grupę.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (ax + y, 2y, bz - y) \in \mathbb{R}^3$. Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których endomorfizm f jest diagonalizowalny.

Zadanie 3. Wyznacz bazy ortonormalne (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^3$) jądra oraz obrazu endomorfizmu z poprzedniego zadania. Przyjmij $a = b = 0$.

Zadanie 4. Punkt $x_0 \in X$ nazywam punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$ jeżeli $f(x_0) = x_0$. Zbadaj liczbę puntów stałych odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2x + (a-1)y + 2z + 1, x - y, 2x + 2y + (a+1)z - 2) \in \mathbb{R}^3$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3. – 14.02.2019*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające warunek $z^3 |z| = (4 - 4\sqrt{3}i)\overline{z}$.

Zadanie 2. Wyznacz, o ile istnieje, macierz o wektorach własnych

$$v_1 = (2, 1, 1)^T, v_2 = (-1, 1, 0)^T, v_3 = (3, 0, 1)^T.$$

Ile jest takich macierzy?

Zadanie 3. Rozważmy układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oraz $b \in \mathbb{R}^2$. Niech w_A oraz w_1, w_2 oznaczają wyznacznik macierzy A oraz wyznaczniki macierzy powstałych z macierzy A przez zastąpienie odpowiednio jej pierwszej i drugiej kolumny wektorem b. Co wiemy o liczbie rozwiązań układ równań $Ax = b$, jeżeli $w_A = w_1 = w_2 = 0$? Odpowiedź uzasadnij; podaj stosowne przykłady.

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2xz + 5y^2 + 2yz + 3z^2,$$

następnie wyznacz liczbę rozwiązań równania $\varphi(x, y, z) = a$ w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1. – 31.01.2020*

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $x * y = (-1)^x y + (-1)^y x$ tworzy grupę. Następnie, wykorzystując własności struktury $(\mathbb{Z}, *)$, znajdź rozwiązania całkowite x równania $((2 * x) - x) * x = 0$.

Zadanie 2. Znajdź bazę Jordana przestrzeni π_1 (tj. wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego) dla endomorfizmu $F : \pi_1 \ni \varphi(x) \to \varphi'(1) + 3\varphi(0) + (\varphi(5) - 2\varphi(0))x \in \pi_1$. Sprawdź poprawność wyniku, wyznaczając macierz endomorfizmu F w tej bazie. Czy endomorfizm F jest diagonalizowalny?

Zadanie 3. Zbadaj określoność formy kwadratowej $\varphi(x, y, z) = x^2 + 4xy + (a+4)y^2 - 2ayz + 2az^2$ w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny elementu $u = (1, 1, 1, 1)$ na obraz odwzorowania liniowego

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (0, x + y, 2x - 2y + z, 0) \in \mathbb{R}^4;$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2. – 07.02.2020*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rozwiązania $z \in \mathbb{C}$ równania $z^5 - (\operatorname{ctg} \beta + i)^4 \,\overline{z} = 0$, w którym $\beta \in (0, \pi)$.

Zadanie 2. Czy każda macierz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ spełniająca warunek

$$\operatorname{rank}(A + I) = \operatorname{rank}(A - I) = 2$$

jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku, gdy jest ona pozytywna wyznacz A^{2020}.

Zadanie 3. Wielomian $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda - 1$ jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy kwadratowej A. Oblicz wyznacznik oraz ślad macierzy $-A^3 + A^2 + 3A - I$.

Zadanie 4. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których nierówność

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 > axy$$

jest spełniona przez wszystkie liczby $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające warunek $x^2 + y^2 > 0$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3. – 13.02.2020*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rozwiązania równania $(z - i)^2 + (\overline{z} + i)^2 = 0$ oraz zaznacz na płaszczyźnie zespolonej te spośród nich, dla których $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}$.

Zadanie 2. Znajdź, dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jej rozkład na iloczyn macierzy $P \cdot J_A \cdot P^{-1}$, gdzie J_A to macierz Jordana, a P macierz nieosobliwa. Następnie, wykorzystując ten rozkład, wskaż cztery różne macierze $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ spełniające warunek $B^2 = A$.

Zadanie 3. Wyznacz bazę jądra oraz bazę obrazu odwzorowania liniowego

$$F : \pi_1 \ni \varphi(x) \to x\varphi'(0) + x^2\varphi'(1) \in \pi_2;$$

π_n oznacza przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny u^* wektora $u = (3, 4, -1)$ na podprzestrzeń liniową

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}.$$

Jaką interpretację geometryczną ma wielkość $\|u - u^*\|$? W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważamy naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1 – 04.02.2021*

Zadanie 1. W zbiorze $G = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(X - I_n) \neq 0\}$ wprowadzamy działanie

$$h : G \times G \ni (A, B) \to A + B - AB \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(a) Uzasadnij, że działanie h jest wewnętrzne w zbiorze G.

(b) Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in G$ jedynym rozwiązaniem równania

$$h(X, A) = 2I_n$$

jest $X = I_n - (A - I_n)^{-1}$. Czy rozwiązanie to należy do zbioru G?

Zadanie 2.

(a) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \pi < \operatorname{Arg}(-iz^3) < 2\pi \quad \text{oraz} \quad 5 < |(3 + 4i)z| < 10\right\}.$$

(b) Rozwiąż równanie

$$iz\,|z|^2 + (2+2i)\,|z|^2 = 2\,(z-i)\,\overline{z}$$

ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 3. Wektory v_1, v_2, v_3 stanowią bazę pewnej przestrzeni liniowej X, na której określono endomorfizm $f : X \to X$, taki że

$$f\,(v_1) = 3v_1 - v_2, \qquad f(v_2) = v_1 + v_2, \qquad f(v_3) = 2v_3.$$

(a) Wyznacz macierz A_f (w bazie v_1, v_2, v_3), jądro oraz obraz endomorfizmu f.

(b) Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im liniowo niezależne wektory własne endomorfizmu f; wektory własne zapisz jako kombinacje liniowe wektorów v_1, v_2, v_3.

(c) Przyjmując, że $X = \pi_2$ oraz $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = x$, $v_3(x) = x^2$, wyznacz $f(\varphi)$, gdzie

$$\varphi(x) = (x-1)^2.$$

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T \begin{pmatrix} -2 & -5 & -6 \\ -3 & -8 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}^3.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2 – 11.02.2021*

Zadanie 1. Wyznacz tę wartość parametru $a \in \mathbb{R}$, dla której liczba $z_1 = 1 + i$ jest rozwiązaniem równania

$$z^3 + az^2 - (a+i)\,z + 2 - 2i = 0;$$

następnie wyznacz pozostałe jego rozwiązania.

Zadanie 2. Rozważmy zadanie polegające na wyznaczeniu wielomianów $\varphi \in \pi_2$ spełniających następujące warunki

$$\varphi\,(-2) = 2, \qquad \varphi\,(2) = -6.$$

(a) Zapisz powyższe warunki w postaci układu równań liniowych

$$Ax = b,$$

w którym macierz $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ i wektor $b \in \mathbb{R}^2$ są znane, a $x \in \mathbb{R}^3$ to poszukiwany wektor współczynników wielomianu φ.

(b) Wykorzystując metodę eliminacji Gaussa sprowadź macierz uzupełnioną U układu do postaci schodkowej, następnie porównaj rzędy macierzy A oraz U i wyciągnij wniosek na temat liczby rozwiązań tego układu.

(c) Wyznacz rozwiązania układu i sprawdź, że faktycznie definiują one wielomiany spełniające zadane warunki.

Zadanie 3. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_2 dla endomorfizmu f,

$$f : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to 2ax^2 + (2b - a - c)\,x + 2c \in \pi_2;$$

sprawdź poprawność wyniku poprzez wyznaczenie macierzy endomorfizmu f w uzyskanej bazie.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (3, -1, 1)^T$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \{(x, y, z) : x + y - z = 0, \quad x - y = 0\};$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjmij iloczyn skalarny s,

$$s\,(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3 – 18.02.2021*

Zadanie 1. Wyznacz tę wartość parametru $a \in \mathbb{C}$, dla której liczba $z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ jest jednym z rozwiązań równania

$$z^6 = a;$$

następnie wyznacz pozostałe jego rozwiązania.

Zadanie 2. Układ równań

$$\begin{cases} x - y - 3z &= 2 \\ 2x - 5y + 6z &= -5 \\ 4x - 5y - 8z &= 5 \end{cases}$$

zapisz w postaci mecierzowej; następnie, stosując metodę eliminacji Gaussa, sprowadź macierz uzupełnioną tego układu do postaci schodkowej i wyciągnij wnioski na temat liczby jego rozwiązań. Wykorzystując postać schodkową macierzy uzupełnionej wyznacz te rozwiązania (o ile układ nie jest sprzeczny).

Zadanie 3. Uzasadnij, że każda macierz rzeczywista wymiaru 2×2 o ujemnym wyznaczniku jest diagonalizowalna. Podaj przykład pokazujący, że taka zależność nie jest prawdziwa dla macierzy zespolonych wymiaru 2×2.

Zadanie 4. Dla macierzy symetrycznej

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

znajdź taką macierz nieosobliwą $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, dla której macierz P^TAP jest macierzą diagonalną. Sprawdź poprawność wyniku wyznaczając iloczyn P^TAP.