
Algebra liniowa

Wykład dla studentów kierunku Automatyka i robotyka WEAIiB AGH

Michał Góra

Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Kraków 2021

Spis treści

Rozdział 1. Podstawowe struktury algebraiczne	4
1.1. Działania wewnętrzne	4
1.1.1. Własności działań wewnętrznych	4
1.2. Grupy, pierścienie, ciała	5
Rozdział 2. Liczby zespolone	8
2.1. Sprzężenie, moduł oraz argument liczby zespolonej	9
2.1.1. Własności sprzężenia oraz modułu liczby zespolonej	9
2.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej	9
2.2.1. Mnożenie oraz dzielenie liczb zespolonych zapisanych w postaci trygonometrycznej	10
2.2.2. Wzór de Moivre’a	11
2.3. Pierwiastek n -tego stopnia z liczby zespolonej	11
2.3.1. Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej	12
2.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej	13
2.5. Logarytm oraz potęgi zespolone*	14
Rozdział 3. Wielomiany – podstawowe wiadomości	15
3.1. Miejsca zerowe wielomianu	15
3.1.1. Pierwiastki wielomianów o współczynnikach całkowitych	16
3.2. Wzory Viète’a	17
3.3. Równania algebraiczne	18
3.3.1. Równania algebraiczne stopnia pierwszego	18
3.3.2. Równania algebraiczne stopnia drugiego	18
3.3.3. Równania algebraiczne stopnia trzeciego	19
3.3.4. Równania algebraiczne stopnia czwartego	20
3.3.5. Równania algebraiczne stopnia $n \geq 5$	21
Rozdział 4. Przestrzenie liniowe	22
4.1. Podprzestrzeń liniowa	23
4.2. Liniowa niezależność wektorów	23
4.3. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej	24
Rozdział 5. Macierze	26
5.1. Działania na macierzach	27
5.1.1. Dodawanie macierzy oraz mnożenie macierzy przez skalar	27
5.1.2. Mnożenie macierzy	27
5.1.3. Macierz transponowana	28
5.1.4. Macierz sprzężona	28
5.2. Wyznacznik macierzy	29
5.2.1. Definicja aksjomatyczna	29
5.2.2. Metoda Laplace’a	31
5.2.3. Metoda przekształceń elementarnych	32

5.3. Macierz odwrotna	33
5.3.1. Algorytmy wyznaczania macierzy odwrotnej	33
5.4. Rząd macierzy	35
Rozdział 6. Równania liniowe	36
6.1. Przekształcenia liniowe	36
6.2. Jądro i obraz odwzorowania liniowego	38
6.3. Układy równań liniowych	39
6.3.1. Twierdzenie Cramera	39
6.3.2. Twierdzenie Kroneckera–Capellego	40
6.4. Metoda eliminacji Gaussa	42
Rozdział 7. Wartości i wektory własne	46
7.1. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona	48
7.2. Podprzestrzeń własna	49
7.3. Diagonalizowalność	50
Rozdział 8. Postać Jordana macierzy	53
8.1. Macierz Jordana	53
8.1.1. Własności macierzy Jordana	54
8.2. Rzeczywista macierz Jordana*	57
Rozdział 9. Baza Jordana	60
9.1. Wektory główne	61
9.2. Macierz przejścia	64
9.3. Zmiana bazy, a postać macierzy odwzorowania liniowego	65
9.3.1. Baza złożona z wektorów własnych	66
9.3.2. Baza Jordana	66
Rozdział 10. Formy kwadratowe	68
10.1. Określoność formy kwadratowej	69
10.2. Metody badania określoności formy kwadratowej	70
10.2.1. Kryterium Sylwestera	70
10.2.2. Kryterium wartości własnych	71
10.2.3. Sprowadzenie do postaci kanonicznej (metoda Lagrange’a)	72
Rozdział 11. Przestrzenie unitarne	75
11.1. Norma określona przez iloczyn skalarny	76
11.2. Ortogonalność	77
11.3. Ortogonalizacja Grama-Schmidta	78
11.4. Rzut prostopadły na podprzestrzeń liniową	79
Rozdział 12. Elementy geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$	81
12.1. Iloczyn wektorów: skalarny, wektorowy, mieszany	82
12.1.1. Iloczyn skalarny	82
12.1.2. Iloczyn wektorowy	83
12.1.3. Iloczyn mieszany	84
12.1.4. Zastosowanie geometryczne iloczynu wektorowego oraz mieszanego	85
12.2. Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$	87
12.2.1. Równanie normalne płaszczyzny	87
12.2.2. Równanie odcinkowe płaszczyzny	87
12.2.3. Równanie parametryczne płaszczyzny	87
12.2.4. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty	87
12.3. Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$	88
12.3.1. Równanie parametryczne prostej	88
12.3.2. Równanie kierunkowe prostej	88
12.3.3. Równanie krawędziowe prostej	88
12.4. Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych	88
12.4.1. Kąt między płaszczyznami oraz prostymi	88

12.4.2. Odległość punktu od płaszczyzny	88
12.4.3. Odległość punktu od prostej	89
12.4.4. Odległość między płaszczyznami	89
12.4.5. Odległość między prostymi	89
Rozdział 13. Zadania egzaminacyjne	90