
Rozdział 14

Zadania egzaminacyjne

Egzamin z algebry liniowej – 03.02.2011

Automatyka i Robotyka – termin I

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Wyznacz sumę rozwiązań równania:

$$(8z + 1 - i)^2 - 2^7 iz^4 = 0.$$

Zadanie 2. Niech $u_0 = (1, 2, 1)$. Rozważmy odwzorowanie

$$f : \mathbb{R}^3 \ni v \rightarrow u_0 \times v \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.

a) Uzasadnij, że f jest endomorfizmem.

b) Wyznacz jądro oraz obraz endomorfizmu f .

Zadanie 3. Rozważmy dwie macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sprawdź, czy macierze A i B są podobne.

b) Wyznacz macierz $I + A^2 + A^4 + \dots + A^{100}$.

Zadanie 4. Rozważmy podprzestrzeń liniową

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0, x - 2y + z = 0\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, -1, 1)$ na podprzestrzeń V . W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ -1 & -a & 4 \end{pmatrix}$$

ma tylko nieujemne wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – 10.02.2011

Automatyka i Robotyka – termin II

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz zbiór:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg \frac{i}{(z + iz)^2} < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Zadanie 2. W zbiorze $Z = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ wprowadzamy działanie $*$ określone wzorem $a * b = a + b - ab$. Sprawdź, czy struktura $(Z, *)$ jest grupą.

Zadanie 3. Wyznacz macierz Jordana endomorfizmu $F : \Pi_2 \ni f \rightarrow f + f' \in \Pi_2$.

Zadanie 4. Wyznacz wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których układ równań

$$\begin{cases} x + y = -a(1 + y) \\ 2x + y = ax - 2 \\ 2x + ay = 1 - a \end{cases}$$

posiada niezerowe rozwiązanie.

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny macierzy $u^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ na pod-

przestrzeń $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^{2 \times 3}$. Przyjmij iloczyn

skalarny $[a_{ij}] \circ [b_{ij}] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{ij}$.

Egzamin z algebry liniowej – 24.02.2011

Automatyka i Robotyka – termin III

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Dnia 10 lutego 2011 roku studenci pierwszego roku jednej z krakowskich uczelni zdawali pisemny egzamin z algebry liniowej. Każdy ze studentów uzyskał inną liczbę punktów. W grupie zdających wprowadzono dwa działania: r_1 , które z dwóch osób wybiera tę, która uzyskała lepszy wynik z egzaminu oraz r_2 , które z dwóch osób wybiera osobę młodszą (decyduje numer PESEL).

a) Sprawdź, czy struktura algebraiczna złożona z powyższej grupy studentów oraz działania r_1 jest grupą?

b) Sprawdź rozdzielną r_1 względem działania r_2 .

Zadanie 2. Prosta $y = ax + b$ przecina wykres funkcji $y = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 3x - 7$ w pięciu różnych punktach $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$. Pokaż, że liczba $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$ nie zależy od parametrów a i b .

Zadanie 3. Niech $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ będzie macierzą, taką że

$$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz $A^3 + (A^{-1})^3$ jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Zbadaj, w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, wymiar obrazu endomorfizmu $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$f(x, y, z) = (-2x + (-1 - a)y + z, ax - az, -x + (a + a^2)y + z).$$

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, 2, 3)$ na podprzestrzeń liniową $x + y + z = 0$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – 03.02.2012

Automatyka i robotyka – termin I

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisaney kartce.

Zadanie 1. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62$. Oblicz

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3}.$$

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}_*^{n \times m}$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach należących do zbioru $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. W zbiorze $\mathbb{R}_*^{n \times m}$ wprowadzamy działanie $\circ$ określone wzorem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{nm}b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Czy struktura $(\mathbb{R}_*^{n \times m}, \circ)$ jest grupą abelową? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. Spośród rozwiązań równania

$$(z^3 - 27i)(z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i) = 0$$

wybierz te, które należą do zbioru $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}\}$.

Zadanie 4. Rozważmy odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ postaci

$$L(x, y, z) = (x + z, 3x + 2z, z).$$

Czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz A_L odwzorowania L jest diagonalna? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz tę bazę.

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ iloczyn skalarny s określono wzorem:

$$s([a_{ij}], [b_{ij}]) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{ij}.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wektora

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

na podprzestrzeń $V = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = A^T\}$.

Egzamin z algebry liniowej – 09.02.2012

Automatyka i robotyka – termin II

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisaney kartce.

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

W zbiorze $V = \{v \in \mathbb{R}^3 : (A - 6I)v = 0\}$ wprowadzamy działanie $\otimes$ określone wzorem

$$v_1 \otimes v_2 = (u_0 \times v_1) - (v_2 \times u_0),$$

gdzie $\times$ to iloczyn wektorowy. Sprawdź czy: a) działanie $\otimes$ jest wewnętrzne w zbiorze V ; b) działanie $\otimes$ jest przemienne; c) działanie $\otimes$ posiada element neutralny. Czy struktura algebraiczna $(V, \otimes)$ jest grupą?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie

$$\left(\sqrt[4]{32} \left(\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8} \right) z + 1 + i \right)^2 + z^4 = 0$$

ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania poniższego układu równań

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ y + 3z - 3t = 1 \\ x + y + z - t = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - a^2 \\ 1 & 0 & 1 + a^2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 5. Na rzeczywistej przestrzeni liniowej V :

$$V = \text{span} \{ \sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x \}$$

określono odwzorowanie liniowe $\mathcal{L} : f \rightarrow f + f'$. Wyznacz $\ker \mathcal{L}$, $\text{Im } \mathcal{L}$ oraz sprawdź, czy jest to endomorfizm na V ; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz również jego rzeczywiste wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – 24.02.2012

Automatyka i robotyka – termin III

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór $G = \{(t, 2^t) : t \in \mathbb{R}\}$ wraz z działaniem $h((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + x_2 + 2, 4y_1y_2)$ tworzy grupę. Czy jest to grupa abelowa?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 3. Spośród wielomianów $v_1(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$, $v_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 2$, $v_3(x) = x$, $v_4(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ wyznacz te, które są liniowo niezależne; następnie uzupełnij je do bazy przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej cztery.

Zadanie 4. Czy macierze

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

są podobne? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz ustalającą to podobieństwo.

Zadanie 5. Wyznacz długość wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie A to punkt w którym prosta $l : \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z-6}{3}$ przecina płaszczyznę $\pi : 4(x+1) + 2y + 6z = 0$, a B to rzut ortogonalny, w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$, wektora $u = (1, -1, 6)$ na podprzestrzeń liniową $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 3z = 0\}$.