

---

## Rozdział 1

---

# Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości

### 1.1. Zdania logiczne

Wyrażenie, któremu w sposób jednoznaczny (bezdyskusyjny, niezależny od miejsca i chwili wypowiedzania, niezależny od podmiotu, który je wypowiada) możemy przypisać jedną z dwóch ocen – prawdę (ozn. 1) lub fałsz (ozn. 0) – nazywamy **zdaniem logicznym**. Z kilku zdań logicznych, przy pomocy **funktorów zdaniotwórczych**, możemy tworzyć kolejne zdania logiczne (złożone). **Negacja** „ $\sim$ ” (czyt. „nieprawda, że...”) jest funktorem zdaniotwórczym jednoargumentowym wyrażającym zaprzeczenie danego zdania logicznego. **Alternatywa** „ $\vee$ ” (czyt. „... lub ...”), **koniunkcja** „ $\wedge$ ” (czyt. „... i ...”), **implikacja** „ $\Rightarrow$ ” (czyt. „jeżeli ... to ...”) oraz **równoważność** „ $\Leftrightarrow$ ” (czyt. „... wtedy i tylko wtedy, gdy ...”) to podstawowe funktory zdaniotwórcze dwuargumentowe. Wartości logiczne zdań utworzonych przy pomocy tych funktorów określa Tabela 1.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \vee q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|-----|-----|--------------|------------|-------------------|-----------------------|
| 0   | 0   | 0            | 0          | 1                 | 1                     |
| 1   | 0   | 0            | 1          | 0                 | 0                     |
| 0   | 1   | 0            | 1          | 1                 | 0                     |
| 1   | 1   | 1            | 1          | 1                 | 1                     |

Tabela 1.

**Przykład 1.1.** Wyrażenie „Dziś jest czwartek” nie jest zdaniem logicznym, gdyż jego wartość logiczna zależy od dnia w którym jest wypowiedzane. Wyrażenie „Jeżeli dziś jest czwartek, to jutro jest piątek” jest zdaniem logicznym; jest to zdanie prawdziwe.

**Ćwiczenie** Czy wyrażenie *Jeżeli dziś jest czwartek, to jutro jest poniedziałek* jest zdaniem logicznym?

### 1.1.1. Tautologie

Zdanie logiczne (złożone), które jest prawdziwe niezależnie od wartości logicznych przyjmowanych przez zdania, które go tworzą, nazywamy **tautologią**.

**Podstawowe tautologie** ( $p, q, r$  – dowolne zdania logiczne):

- *prawo wyłączonego środka:*

$$p \vee (\sim p);$$

- *prawo podwójnego przeczenia:*

$$(\sim (\sim p)) \Leftrightarrow p;$$

- *prawo przemienności alternatywy:*

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p);$$

- *prawo przemienności koniunkcji:*

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p);$$

- *prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy:*

$$((p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r));$$

- *prawo rozdzielności alternatywy względem koniunkcji:*

$$((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r));$$

- *zaprzeczenie koniunkcji (pierwsze prawo de Morgana)*

$$(\sim (p \wedge q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q));$$

- *zaprzeczenie alternatywy (drugie prawo de Morgana):*

$$(\sim (p \vee q)) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q));$$

- *zaprzeczenie implikacji:*

$$(\sim (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q));$$

- *prawo kontrapozycji:*

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim p));$$

- *prawo „nie wprost”:*

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge (\sim q)) \Rightarrow (\sim p)).$$

### 1.1.2. Formy zdaniowe

**Formą zdaniową** nazywamy takie wyrażenie, w którym występuje zmienna i które staje się zdaniem logicznym, gdy w jej miejsce podstawimy dowolny element pewnego zbioru, zwanego dziedziną formy zdaniowej.

**Przykład 1.2.** Wyrażenie „Dziś jest czwartek” można traktować jak formę zdaniową zmiennej „dziś” – jej dziedziną jest zbiór wszystkich dat. Podstawiając za zmienną „dziś” na przykład datę 05.10.2010 otrzymujemy zdanie logiczne fałszywe.

**Przykład 1.3.** Wyrażenie  $x^2 + 2x > 0$  jest formą zdaniową, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Podstawiając za  $x$  dowolną liczbę z przedziałów  $(-\infty, -2)$  lub  $(0, \infty)$  otrzymujemy zdanie prawdziwe.

## 1.2. Kwantyfikatory

Istnieją dwa podstawowe rodzaje kwantyfikatorów:

$\forall$  – dla każdego (ang. for **All**),  $\exists$  – istnieje (ang. there **Exists**);

wprowadza się również ich wersje „wykrzyknikowe”:

$\forall!$  – dla prawie wszystkich,  $\exists!$  – istnieje dokładnie jeden.

Kwantyfikatory formę zdaniową przekształcają w zdanie logiczne.

**Przykład 1.4.** Wyrażenie  $\forall x \in \mathbb{R} \ x^2 + 2x > 0$  jest zdaniem logicznym (fałszywym); podobnie, wyrażenie  $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x > 0$  jest również zdaniem logicznym (prawdziwym).

### 1.2.1. Prawa zdań zawierających kwantyfikatory

Niech  $p(x)$  oraz  $q(x)$  będą dowolnymi formami zdaniowymi zmiennej  $x$  (w poniższych wyrażeniach symbol „:” czytamy „taki że”):

- $\sim (\forall x \ p(x)) \Leftrightarrow (\exists x : (\sim p(x)))$
- $\sim (\exists x : p(x)) \Leftrightarrow (\forall x \ (\sim p(x)))$
- $(\forall x \ (p(x) \wedge q(x))) \Leftrightarrow ((\forall x \ p(x)) \wedge (\forall x \ q(x)))$
- $(\exists x : (p(x) \vee q(x))) \Leftrightarrow ((\exists x : p(x)) \vee (\exists x : q(x)))$
- $((\forall x \ p(x)) \vee (\forall x : q(x))) \Rightarrow (\forall x \ (p(x) \vee q(x)))$
- $(\exists x : (p(x) \wedge q(x))) \Rightarrow ((\exists x : p(x)) \wedge (\exists x : q(x)))$

Ponadto, jeżeli  $p(x, y)$  jest dowolną formą zdaniową zmiennych  $x, y$  to

- $(\exists x : \forall y \ p(x, y)) \Rightarrow (\forall y \ \exists x : p(x, y))$ .

**Ćwiczenie** Skonstruować przykłady zdań pokazujących, że w trzech ostatnich punktach implikacji nie można zastąpić równoważnościami.

**Przykład 1.5.** *Zaprzeczeniem zdania*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{n+1}{2n-3} - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon$$

*jest zdanie*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : \left| \frac{n+1}{2n-3} - \frac{1}{2} \right| > \varepsilon.$$

### 1.3. Zasada indukcji matematycznej

**Twierdzenie 1.1.** *Jeżeli twierdzenie, w którym mowa o liczbach naturalnych, jest prawdziwe dla pewnej liczby naturalnej  $n_0$  oraz z założonej prawdziwości tego twierdzenia dla liczby naturalnej  $n$  większej od  $n_0$  wynika jego prawdziwość dla liczby  $n+1$ , to twierdzenie to jest również prawdziwe dla każdej liczby naturalnej większej od  $n_0$ .*

**Przykład 1.6.** *Chcemy wykazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n$ :*

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|. \quad (T(n))$$

*Twierdzenie  $T(1)$  jest prawdziwe. Załóżmy więc, że warunek  $T(n)$  jest spełniony i na tej podstawie chcemy wykazać prawdziwość warunku  $T(n+1)$ :*

$$|\sin(n+1)x| \leq (n+1) |\sin x|.$$

*Otrzymujemy*

$$|\sin(n+1)x| = |\sin(nx+x)| = |\sin nx \cos x + \cos nx \sin x| \leq \quad (1.1)$$

$$\leq |\sin nx \cos x| + |\cos nx \sin x| \leq |\sin nx| + |\sin x| \leq \dots \quad (1.2)$$

*wykorzystując teraz założenie indukcyjne  $T(n)$ , dostajemy*

$$\dots \leq n |\sin x| + |\sin x| = (n+1) |\sin x|.$$

*Na podstawie indukcji matematycznej wnioskujemy, że warunek  $T(n)$  jest spełniony dla każdej liczby naturalnej.*

### 1.4. Elementy teorii zbiorów

Zbiór oraz przynależność do zbioru to pojęcia pierwotne i jako takie nie wymagają definicji. Zbiór, który nie zawiera żadnego elementu oznaczamy przez  $\emptyset$  i nazywamy **zbiorem pustym**. Zbiór, którego elementami są liczby nazywamy **zbiorem liczbowym**. Przyjmujemy następującą notację:  $\mathbb{N}$  - zbiór liczb naturalnych (bez zera),  $\mathbb{Z}$  - zbiór liczb całkowitych,  $\mathbb{Q}$  - zbiór liczb wymiernych,  $\mathbb{R}$  - zbiór liczb rzeczywistych,  $\mathbb{C}$  - zbiór liczb zespolonych.

**Uwaga:** należy odróżniać element zbioru od zbioru złożonego z jednego elementu (tzw. *singletonu*):

$$x \neq \{x\}, \quad \text{ale} \quad x \in \{x\}.$$

W szczególności, zbiór  $\{\emptyset\}$  zawiera jeden element; jest nim zbiór pusty (który nie zawiera żadnego elementu).

### 1.4.1. Działania na zbiorach

Niech  $X$  będzie dowolnym zbiorem niepustym, a  $A$  i  $B$  dowolnymi jego podzbiórmi. Między zbiorami  $A$  i  $B$  możemy wprowadzić następujące relacje (zależności):

- *suma zbiorów*:  $A \cup B = \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$
- *iloczyn zbiorów*:  $A \cap B = \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$
- *różnica zbiorów*:  $A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\}$
- *różnica symetryczna zbiorów*:  $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- *dopełnienie zbioru*:  $A' = \{x \in X : x \notin A\}$
- *inkluzja (zawieranie)*:  $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$
- *równość zbiorów*:  $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$

### 1.4.2. Iloczyn kartezjański zbiorów

Niech  $x \in X$  oraz  $y \in Y$  będą dowolnymi elementami niepustych zbiorów  $X, Y$ . **Parą uporządkowaną**  $(x, y)$  nazywamy zbiór dwuelementowy  $\{x, \{x, y\}\}$ . **Iloczynem kartezjańskim** zbiorów niepustych  $A, B$  nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych, których pierwszy element należy do  $A$ , a drugi do  $B$ , tj.

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}.$$

Definicję iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów można w sposób naturalny rozszerzyć na dowolną, również nieskończoną, liczbę zbiorów:

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in A_i \ (i = 1, \dots, n)\},$$

jednocześnie przyjmujemy następującą konwencję:  $A \times \cdots \times A$  ( $n$  razy) oznaczamy jako  $A^n$ ; w szczególności  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^3$ ,  $[0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^2$ , itp.

**Przykład 1.7.** Niech  $A = \{\triangle, \blacktriangle, \nabla, \blacktriangledown\}$  oraz  $B = \{0, 1\}$ . Wówczas

$$A \times B = \{(\triangle, 0), (\triangle, 1), (\blacktriangle, 0), (\blacktriangle, 1), (\nabla, 0), (\nabla, 1), (\blacktriangledown, 0), (\blacktriangledown, 1)\}.$$

**Podstawowe własności działań na zbiorach:**

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ,
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ,
- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ ,
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ,
- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ ,
- $(A')' = A$ ,
- $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$ ,
- $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ ,
- $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$ .

**Przykład 1.8.** Uzasadnimy równość:  $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ .

Mamy:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \setminus C) &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge \sim (x \in B \setminus C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge \sim (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

co należało wykazać.