
Rozdział 2

Podstawowe struktury algebraiczne

2.1. Działania wewnętrzne

Niech X będzie zbiorem niepustym. Dowolną funkcję $h : X \times X \rightarrow X$ nazywamy **działaniem wewnętrznym** w zbiorze X . Działanie wewnętrzne, jak każdą funkcję, możemy określać na wiele sposobów:

- słownie: w grupie studentów jednej z krakowskich uczelni uczęszczających regularnie na intrygujący wykład z algebry liniowej (zakładamy, że jest to zbiór niepusty) wprowadzamy działanie, które z pary elementów wybiera element młodszy (decyduje numer PESEL);
- graficznie: aby zdefiniować funkcję $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ wystarczy w układzie XYZ zaznaczyć stosowne kropki;
- tabelą działań: w zbiorze $X = \{\clubsuit, \spadesuit, \blacklozenge\}$ wprowadzamy działanie h :

h	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\blacklozenge$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\blacklozenge$
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\blacklozenge$	$\clubsuit$
$\blacklozenge$	$\clubsuit$	$\blacklozenge$	$\spadesuit$

na przykład: $h(\spadesuit, \blacklozenge) = \clubsuit$; $h(\blacklozenge, \spadesuit) = \blacklozenge$;

- wzorem: $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \rightarrow \max\{x, y\} \in \mathbb{R}$.

2.1.1. Własności działań wewnętrznych

Niech h będzie działaniem wewnętrznym w zbiorze X .

Definicja 2.1. *Element $e \in X$ spełniający warunek*

$$\forall x \in X \quad h(e, x) = h(x, e) = x \quad (2.1)$$

*nazywamy **elementem neutralnym** działania h .*

Zakładając, że w zbiorze X dla pewnego działania wewnętrznego h istnieją dwa elementy neutralne e_1 i e_2 , mamy:

$$e_1 = h(e_1, e_2) = e_2.$$

Stąd wynika następujące

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli element neutralny istnieje to jest jedyny.*

Definicja 2.2. *Działanie wewnętrzne $h : X \times X \rightarrow X$ nazywamy **działaniem łącznym**, jeżeli*

$$\forall x, y, z \in X \quad h(x, h(y, z)) = h(h(x, y), z). \quad (2.2)$$

Definicja 2.3. *Działanie wewnętrzne $h : X \times X \rightarrow X$ nazywamy **działaniem przemennym**, jeżeli*

$$\forall x, y \in X \quad h(x, y) = h(y, x). \quad (2.3)$$

Niech $h : X \times X \rightarrow X$ będzie działaniem wewnętrznym o elemencie neutralnym e .

Definicja 2.4. *Jeżeli dla elementu $x \in X$ istnieje element $\tilde{x} \in X$ spełniający warunek*

$$h(\tilde{x}, x) = h(x, \tilde{x}) = e$$

*to element $\tilde{x}$ nazywamy **elementem symetrycznym** dla elementu x względem działania h .*

Założmy, że $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ są dwoma elementami symetrycznymi dla elementu x względem działania łącznego (!) h o elemencie neutralnym e . Wówczas

$$\tilde{x}_1 = h(e, \tilde{x}_1) = h(h(\tilde{x}_2, x), \tilde{x}_1) = h(\tilde{x}_2, h(x, \tilde{x}_1)) = h(\tilde{x}_2, e) = \tilde{x}_2,$$

skąd wynika następujące

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli działanie wewnętrzne jest łączne oraz posiada element neutralny to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.*

Przykład 2.1. *Rozważmy ponownie grupę krakowskich studentów uczęszczających na wykład z algebry liniowej. Łatwo sprawdzić, że wprowadzone w tym zbiorze działanie jest łączne i przemienne. Elementem neutralnym względem tego działania jest najstarszy element; jest on jednocześnie jedynym elementem, który posiada element symetryczny; jest nim on sam.*

2.2. Grupy, pierścienie, ciała

Niech G będzie dowolnym zbiorem niepustym, a $h : G \times G \rightarrow G$ działaniem wewnętrznym w G .

Definicja 2.5. *Parę (G, h) nazywamy **grupą**, jeżeli:*

- działanie h jest łączne;

- działanie h posiada element neutralny;
- każdy element G posiada element symetryczny względem działania h w G .

Jeżeli działanie h jest przemienne, to grupę (G, h) nazywamy **grupą abelową** (przemienną).

Przykład 2.2. Każda z poniższych struktur jest grupą:

- $(\mathbb{Z}, +)$, tj. zbiór liczb całkowitych z działaniem dodawania liczb; elementem neutralnym jest $e = 0$, elementem symetrycznym dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{Z}$ jest liczba $\tilde{z} = -z$ (nazywana w tym przypadku elementem przeciwnym);
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, tj. zbiór liczb rzeczywistych bez zera z działaniem mnożenia liczb; elementem neutralnym jest $e = 1$, elementem symetrycznym dla dowolnej liczby $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest liczba $\tilde{r} = \frac{1}{r}$ (nazywana w tym przypadku elementem odwrotnym);
- $(\mathbb{Z}_m, +_{\text{mod } m})$, gdzie, dla ustalonej liczby naturalnej m , $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ oraz dla $a, b \in \mathbb{Z}_m$ $(a+b)_{\text{mod } m}$ (czyt. $a+b$ modulo m) to reszta z dzielenia $a+b$ przez m (np. $(2+5)_{\text{mod } 6} = 7_{\text{mod } 6} = 1$). Elementem neutralnym względem działania $+_{\text{mod } m}$ jest $e = 0$; elementem symetrycznym dla $n \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ jest $\tilde{n} = m - n$; $\tilde{0} = 0$;
- $(\mathcal{B}(X), \circ)$, tj. zbiór bijekcji określonych na niepustym zbiorze X o wartościach w X , z działaniem składania odwzorowań: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, dla $x \in X$. Elementem neutralnym jest funkcja identyczność $\text{id}_X : X \ni x \rightarrow x \in X$; elementem symetrycznym dla bijekcji f jest funkcja do niej odwrotna f^{-1} (również bijekcja – zob. Wykład z analizy matematycznej).

Grupy z punktów a), b) i c) są abelowe; grupa z punktu d), w przypadku, gdy zbiór X liczy więcej niż dwa elementy, nie jest abelowa.

Niech teraz h_1 i h_2 będą dwoma działaniami wewnętrznymi w niepustym zbiorze G .

Definicja 2.6. Strukturę (G, h_1, h_2) nazywamy **ciałem**, jeżeli:

- (G, h_1) jest grupą abelową, tj.
 - a) działanie h_1 jest łączne;
 - b) działanie h_1 posiada w G element neutralny e_1 ;
 - c) każdy element G posiada element symetryczny względem działania h_1 ;
 - d) działanie h_1 jest przemienne;
- $(G \setminus \{e_1\}, h_2)$ jest grupą abelową, tj.
 - e) działanie h_2 jest łączne;
 - f) działanie h_2 posiada w $G \setminus \{e_1\}$ element neutralny;
 - g) każdy element $G \setminus \{e_1\}$ posiada element symetryczny względem działania h_2 ;
 - h) działanie h_2 jest przemienne;
- działanie h_2 jest rozdzielne względem działania h_1 , tzn.

$$\forall x, y, z \in G \quad h_2(x, h_1(y, z)) = h_1(h_2(x, y), h_2(x, z)). \quad (2.4)$$

Jeżeli struktura (G, h_1, h_2) spełnia wszystkie warunki Definicji 2.6, za wyjątkiem warunku g) to strukturę tę nazywamy **pierścieniem**.

Zauważmy, że oznaczając działanie h_1 przez „+”, a działanie h_2 przez „·”, tzn.:

$$h_1(x, y) = x + y, \quad h_2(x, y) = x \cdot y,$$

warunek (2.4) przyjmuje dobrze znaną postać:

$$\forall x, y, z \in G \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Przykład 2.3. Niech Π oznacza zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych:

$$\Pi = \{x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R} \ (i = 0, \dots, n), n \in \mathbb{N}\}.$$

Łatwo sprawdzić, że struktura $(\Pi, +, \cdot)$, gdzie $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania i mnożenia wielomianów, jest pierścieniem; warunek g) nie jest spełniony, gdyż odwrotność wielomianu na ogół nie jest wielomianem (kiedy jest?).

Przykład 2.4. Każda z poniższych struktur jest ciałem (ćwiczenie):

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, gdzie $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb;
- $(\mathbb{Q}[r], +, \cdot)$, gdzie $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{Q}[r] = \{x + ry : x, y \in \mathbb{Q}\}$, $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb;
- $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), +, \circ)$, gdzie $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \ni x \mapsto ax \in \mathbb{R} : a \in \mathbb{Q}\}$ oraz $+$ i $\circ$ to naturalne działania dodawania oraz składania funkcji.

Przykład 2.5. Na zakończenie wykażemy, że zbiór $\mathbb{R}^2$ z działaniami dodawania i mnożenia określonymi poniżej:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

również jest ciałem. Warunki a) oraz d) Definicji 2.6 są oczywistymi konsekwencjami łączności oraz przemienności dodawania liczb; warunki e), g) oraz rozdzielność $\cdot$ względem $+$ sprawdzamy bezpośrednimi prostymi rachunkami (lewa=prawej). Wprost z definicji działania $+$ wynika, że $e_+ = (0, 0)$ jest jego elementem neutralnym, natomiast elementem symetrycznym (w przypadku działania oznaczanego $+$ nazywany elementem przeciwnym) dla elementu (x, y) jest $(-x, -y)$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x e_1 - y e_2 = x \\ x e_2 + y e_1 = y \end{cases}$$

ze względu na niewiadome e_1, e_2 , znajdziemy element neutralny $e. = (e_1, e_2)$ dla działania $\cdot$. Po prostych rachunkach otrzymujemy $e. = (1, 0)$. Podobnie, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x \tilde{x} - y \tilde{y} = 1 \\ x \tilde{y} + y \tilde{x} = 0 \end{cases}$$

ze względu na niewiadome $\tilde{x}, \tilde{y}$ znajdziemy element symetryczny $(\tilde{x}, \tilde{y})$ (w przypadku działania oznaczanego $\cdot$ nazywany elementem odwrotnym) dla dowolnego niezerowego elementu (x, y) . Po prostych rachunkach otrzymujemy:

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$