
Rozdział 3

Liczby zespolone

Zbiór $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ z działaniami $+$ oraz $\cdot$ określonymi poniżej:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (3.1)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (3.2)$$

jest ciałem (zob. Rozdział 2, Przykład 2.5); jest to tzw. **ciało liczb zespolonych**. Przypomnijmy, że elementem neutralnym dla dodawania jest $\mathbf{0} = (0, 0)$, dla mnożenia $\mathbf{1} = (1, 0)$. Elementem przeciwnym dla elementu (x, y) jest $(-x, -y)$, elementem odwrotnym dla dowolnego niezerowego elementu (x, y) jest

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

Dowolny element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ możemy interpretować jako punkt (wektor) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Ponieważ

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \quad (3.3)$$

zatem, utożsamiając liczbę zespoloną $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą x oraz przyjmując oznaczenie $i = (0, 1)$, uwzględniając równość (3.3), otrzymujemy **postać kanoniczną** (dwumienną) liczby zespolonej

$$z = x + iy;$$

$x = \Re(z)$ nazywamy **częścią rzeczywistą**, $y = \Im(z)$ **częścią urojoną** liczby zespolonej z . Dwie liczby zespolone są równe, jeżeli mają równe części rzeczywiste oraz części urojone. Liczbę $i = (0, 1)$ nazywamy **jednostką urojoną**. Zauważmy, że

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Postać kanoniczna liczby zespolonej umożliwia dodawanie i mnożenie liczb zespolonych tak samo jak wielomianów, tzn. *podobny do podobnego* (w przypadku dodawania):

$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

oraz *każdy przez każdy* (w przypadku mnożenia):

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 = \dots$$

i dalej, uwzględniając warunek $i^2 = -1$,

$$\dots = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Porównaj te wyniki ze wzorami (3.1) oraz (3.2).

3.1. Sprzężenie, moduł oraz argument liczby zespolonej

Z każdą liczbą zespoloną $z = x + iy$ możemy stowarzyszyć liczbę zespoloną $\bar{z} = x - iy$ nazywaną **sprzężeniem** liczby z , oraz liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nazywaną **modułem** liczby zespolonej.

3.1.1. Własności sprzężenia oraz modułu liczby zespolonej

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; wówczas:

- $z + \bar{z} = 2\Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$;
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$; ⁽¹⁾
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$;
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$;
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Niech $z = x + iy$ będzie dowolną niezerową liczbą zespoloną. Wówczas

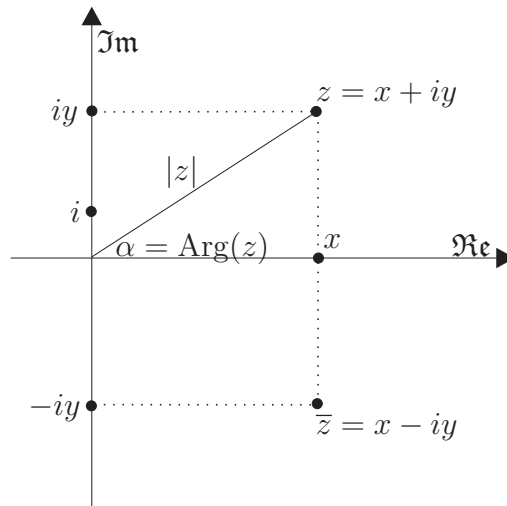
$$z = x + iy = |z| \left(\frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad (3.4)$$

gdzie kąt $\alpha = \arg(z)$, nazywany **argumentem** liczby zespolonej, wyznaczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{x}{|z|} \\ \sin \alpha = \frac{y}{|z|} \end{cases}.$$

Można łatwo wykazać, że w dowolnym przedziale postaci $[r, r + 2\pi)$ lub $(r, r + 2\pi]$ ($r \in \mathbb{R}$) układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, a dowolne dwa jego rozwiązania różnią się o całkowitą wielokrotność 2π . Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $(-\pi, \pi]$ nazywamy **argumentem głównym** i oznaczamy $\text{Arg}(z)$.

¹ Dzielenie przez liczbę zespoloną z rozumiemy jako mnożenie przez liczbę z^{-1} .



Wykres 1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej, jej modułu, sprzężenia oraz argumentu.

Przykład 3.1. Dla liczby $z = 1 - i$ mamy: $\Re(1 - i) = 1$, $\Im(1 - i) = -1$, $|1 - i| = \sqrt{2}$. Aby wyznaczyć argument liczby $1 - i$ musimy rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Jego rozwiązaniem jest każda z liczb $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); zatem $\text{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$. Ostatecznie, uwzględniając (3.4), możemy napisać

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

3.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Znając moduł $|z|$ oraz argument α liczby zespolonej z możemy zapisać ją w postaci

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

nazywanej **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej. Dwie niezerowe liczby zespolone są równe jeżeli mają równe moduły i argumenty główne (ich argumenty mogą się natomiast różnić o całkowitą wielokrotność 2π). Liczba 0 jest jedyną liczbą zespoloną jednoznacznie określoną przez jej moduł.

3.2.1. Mnożenie oraz dzielenie liczb zespolonych zapisanych w postaci trygonometrycznej

Niech $z_1 = |z_1| (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)$ oraz $z_2 = |z_2| (\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$. Wówczas:

- a) $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$;
- b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 - \alpha_2))$, gdzie $z_2 \neq 0$.

Ze wzorów tych wynikają następujące własności argumentu iloczynu oraz argumentu ilorazu liczb zespolonych:

- $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$;
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$;

ponadto, ponieważ $\operatorname{Arg}(z \cdot \bar{z}) = 0$:

- $\arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

3.2.2. Wzór de Moivre'a

Ze wzoru na iloczyn liczb zespolonych wyrażonych w postaci trygonometrycznej wynika, że

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha.$$

Zależność tę można w prosty sposób uogólnić uzyskując tzw. **wzór de Moivre'a** (dowód indukcyjny):

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha), \quad \text{dla } n \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 3.2. Aby obliczyć wartość wyrażenia

$$w = \frac{(-1 - \sqrt{3}i)^9}{(-1 + i)^4}$$

wygodnie jest jego licznik i mianownik sprowadzić do postaci trygonometrycznej, a następnie zastosować do nich wzór de Moivre'a.

Niech $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ oraz $z_2 = -1 + i$. Wówczas

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = \frac{\operatorname{Re} z_1}{|z_1|} = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha_1 = \frac{\operatorname{Im} z_1}{|z_1|} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} \cos \alpha_2 = \frac{\operatorname{Re} z_2}{|z_2|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha_2 = \frac{\operatorname{Im} z_2}{|z_2|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Zatem $\operatorname{Arg}(z_1) = -\frac{2}{3}\pi$ oraz $\operatorname{Arg}(z_2) = \frac{3}{4}\pi$. Mamy więc:

$$w = \frac{(-1 - \sqrt{3}i)^9}{(-1 + i)^4} = \frac{(2(\cos(-\frac{2}{3}\pi) + i \sin(-\frac{2}{3}\pi)))^9}{(\sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi))^4} = \dots$$

stosując teraz wzór de Moivre'a, otrzymujemy

$$\dots = \frac{(2^9(\cos(-6\pi) + i \sin(-6\pi)))}{(2^2(\cos 3\pi + i \sin 3\pi))} = 2^7(\cos(-9\pi) + i \sin(-9\pi)) = -2^7.$$

3.3. Pierwiastek n -tego stopnia z liczby zespolonej

Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie ustaloną liczbą naturalną, a $c \in \mathbb{C}$ ustaloną liczbą zespoloną. Rozważmy następujące równanie

$$z^n = c. \tag{3.5}$$

Każdą liczbę zespoloną z dla której równanie (3.5) jest prawdziwe nazywać będziemy jego rozwiązaniem. Celem naszym będzie podanie przepisu pozwalającego znajdować (wszystkie) rozwiązania równania (3.5).

Zapiszmy szukane rozwiązanie z oraz zadaną liczbę c w postaci trygonometrycznej:

$$z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad c = |c|(\cos \gamma + i \sin \gamma),$$

a następnie podstawmy je do równania (3.5). Po zastosowaniu wzoru de Moivre'a otrzymujemy równanie

$$|z|^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) = |c|(\cos \gamma + i \sin \gamma),$$

z którego natychmiast wynika, że

$$|z|^n = |c|, \quad n\alpha = \gamma + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

lub równoważnie:

$$|z| = \sqrt[n]{|c|}, \quad \alpha = \frac{\gamma + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Twierdzenie 3.1. *Jeżeli $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ to równanie $z^n = c$ posiada n różnych rozwiązań $z_0, \dots, z_{n-1}$ przy czym*

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \frac{\gamma + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\gamma + 2k\pi}{n} \right), \quad (3.6)$$

dla $k = 0, \dots, n-1$; $\gamma = \arg c$.

Uwaga Dla $c \in \mathbb{C}$ zapis $\sqrt[n]{c}$ oznacza zbiór (!) wszystkich liczb zespolonych, których n -ta potęga to c ; jest to więc zbiór rozwiązań równania $z^n = c$, tj.

$$\sqrt[n]{c} = \{z_0, \dots, z_{n-1}\},$$

gdzie liczby z_k określa wzór (3.6). Ten sam zapis stosuje się również dla znanej ze szkoły średniej funkcji pierwiastkowej

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \ni x \rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+.$$

W tych dwóch przypadkach ten sam zapis ma zastosowanie do różnych obiektów: w pierwszym przypadku oznacza zbiór, w drugim liczbę. O tym, że łatwo o pomyłkę najlepiej niech świadczy fakt, że w wielu podręcznikach można znaleźć niepoprawny zapis $\sqrt{-1} = i$. Swoją drogą, czym należy zastąpić symbol Δ , aby wyrażenie $\sqrt{-1} \Delta i$ było poprawne?

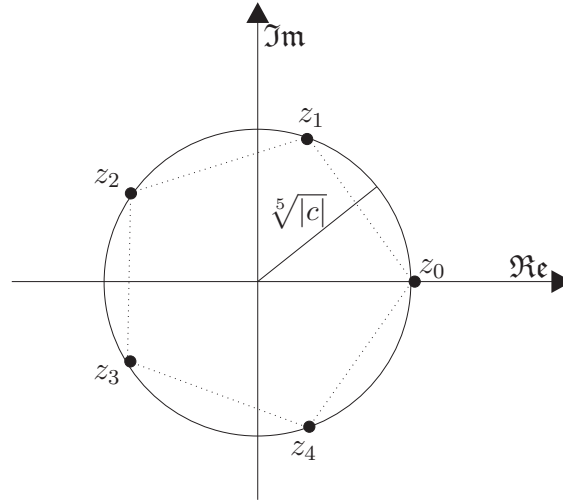
3.3.1. Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Użytecznym przepisem na rozwiązanie równania (3.5) jest również, wynikająca ze wzoru (3.6), formuła

$$z_k = z_0 \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right)^k \quad (3.7)$$

$$= z_{k-1} \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right), \quad k = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

w której z_0 jest jednym z rozwiązań równania (3.5). Wynika z niej, że liczba zespolona (wektor płaszczyzny zespolonej) z_1 powstaje w wyniku obrotu z_0 o kąt $\frac{2\pi}{n}$; podobnie z_2 to wynik obrotu z_1 o ten sam kąt. Ogólnie, z_{k+1} powstaje z obrotu z_k o kąt $\frac{2\pi}{n}$. Innymi słowy, liczby $z_0, \dots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = c$ stanowią wierzchołki n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{|c|}$ (zob. Wykres 2).



Wykres 2. Interpretacja geometryczna rozwiązań równania $z^5 = c$.

Przykład 3.3. Rozważmy równanie $z^3 = 1 - i$. Aby znaleźć jego rozwiązania posłużymy się wzorem (3.6). Ponieważ $|c| = |1 - i| = \sqrt{2}$ oraz $\gamma = \text{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$ (zob. Przykład 3.1), mamy

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{3} \right) \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right), \\ z_1 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 2\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right), \\ z_2 &= \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{4} + 4\pi}{3} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{-1 - i}{\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

Przykład 3.4. Wykorzystując wyliczoną w poprzednim przykładzie wartość pierwiastka z_2 oraz stosując wzór (3.7), obliczymy „jawne” wartości pozostałych dwóch pierwiastków. Otrzymujemy odpowiednio:

$$\begin{aligned} z_0 &= z_2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{-1 - i}{\sqrt[3]{2}} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1 + i}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ z_1 &= z_2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1 + i}{\sqrt[3]{2}} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \end{aligned}$$

Przykład 3.5. Rozważmy równanie $z^4 |z| = -\bar{z}$. Jego rozwiązań poszukamy w postaci trygonometrycznej $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Mamy:

$$z^4 |z| = r^5 (\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha)$$

oraz

$$-\bar{z} = (\cos \pi + i \sin \pi) \cdot r (\cos (-\alpha) + i \sin (-\alpha)) = r (\cos (\pi - \alpha) + i \sin (\pi - \alpha)).$$

Porównując moduły oraz argumenty tych liczb otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} r^5 = r \\ 4\alpha = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $r \in \{0, 1\}$ oraz $\alpha \in \{\pm \frac{\pi}{5}, \pm \frac{3\pi}{5}, \pi\}$. Ostatecznie, rozwiązaniem wyjściowego równania są liczby

$$\left\{ -1, 0, \cos \frac{\pi}{5} \pm i \sin \frac{\pi}{5}, \cos \frac{3\pi}{5} \pm i \sin \frac{3\pi}{5} \right\}.$$

3.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej*

Wychodząc od postaci trygonometrycznej liczby zespolonej

$$z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

oraz uwzględniając wzór (którego uzasadnienie wymaga znajomości szeregów potęgowych)

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha \quad (\text{dla } \alpha \in \mathbb{R})$$

otrzymujemy tzw. *postać wykładniczą liczby zespolonej*:

$$z = re^{i\alpha},$$

w której $r \geq 0$ to moduł, a $\alpha \in \mathbb{R}$ argument liczby zespolonej z .

Ciekawostka Zapisując liczbę -1 w postaci wykładniczej otrzymujemy zwarty wzór łączący pięć najważniejszych stałych matematycznych: 0 (element neutralny dodawania), 1 (element neutralny mnożenia), i , e oraz π

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Przez wielu, wzór ten jest uznawany za najpiękniejszy wzór matematyki.