

Wielomiany – podstawowe wiadomości

Funkcję postaci

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (4.1)$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{R}$ ($i = 0, \dots, n$), $a_n \neq 0$ nazywamy **wielomianem rzeczywistym** stopnia n ; jeżeli współczynniki a_i ($i = 0, \dots, n$) przyjmują wartości zespolone, to funkcję tę nazywamy **wielomianem zespolonym**. Stopień wielomianu f oznaczamy jako $\deg f$ (ang. degree).

4.1. Miejsca zerowe wielomianu

Każdą liczbę $s_0 \in \mathbb{C}$ dla której $f(s_0) = 0$ nazywamy **miejszem zerowym** (zerem, pierwiastkiem) wielomianu f . Łatwo wykazać, że każdy wielomian rzeczywisty nieparzystego stopnia ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty. Prawdziwe jest również, dużo trudniejsze do wykazania, następujące

Twierdzenie 4.1 (Zasadnicze twierdzenie algebry, Gauss 1799). *Każdy wielomian (zespolony) dodatniego stopnia ma miejsce zerowe.*

Twierdzenie to w połączeniu z poniższym twierdzeniem (tzw. twierdzeniem Bézout; nie jest ono autorstwa Bézout, ale pod taką nazwą jest znane) odgrywa kluczową rolę w wielu działach matematyki.

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli s_0 jest pierwiastkiem wielomianu f oraz $\deg f > 0$, to wielomian ten dzieli się bez reszty przez wielomian $s - s_0$; wielomian f można wówczas zapisać w postaci*

$$f(s) = (s - s_0) g(s),$$

gdzie g jest pewnym wielomianem stopnia $\deg f - 1$.

Z powyższych twierdzeń wynika, że **każdy wielomian stopnia $n > 0$ ma dokładnie n pierwiastków** (licząc z krotnościami); oznaczając te pierwiastki przez $s_1, \dots, s_n$, wielomian (4.1) możemy zapisać w postaci iloczynowej

$$f(s) = a_n(s - s_1) \cdots (s - s_n). \quad (4.2)$$

Jeżeli f jest wielomianem rzeczywistym, to dla dowolnej liczby $s \in \mathbb{C}$ mamy $\overline{f(s)} = f(\overline{s})$; oznacza to między innymi, że jeżeli liczba zespolona jest zerem wielomianu rzeczywistego, to liczba do niej sprzężona również. Z twierdzenia Bézout wynika więc, że jeżeli s_0 jest zespolonym nierzeczywistym pierwiastkiem wielomianu f to wielomian ten dzieli się bez reszty przez trójmian kwadratowy $s^2 - 2\Re(s_0)s + |s_0|^2$:

$$f(s) = (s^2 - 2\Re(s_0)s + |s_0|^2)g(s),$$

gdzie g jest pewnym wielomianem, takim że $\deg g = \deg f - 2$.

W przypadku gdy wielomian (4.1) jest rzeczywisty, każde dwa czynniki jego rozkładu (4.2) zawierające pierwiastki parami sprzężone, tj. $s - s_i$ oraz $s - \overline{s_i}$, mogą zostać wymnożone. Otrzymamy wówczas rozkład dowolnego wielomianu rzeczywistego na iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia pierwszego oraz trójmianów kwadratowych nierozkładalnych (tzn. o ujemnym wyróżniku):

$$f(s) = a_n(s - s_1)^{l_1} \cdots (s - s_m)^{l_m} (s^2 + \alpha_1 s + \beta_1)^{k_1} \cdots (s^2 + \alpha_r s + \beta_r)^{k_r},$$

gdzie $s_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$); $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, r$); $\deg f = l_1 + \dots + l_m + 2(k_1 + \dots + k_r)$.

Definicja 4.1. Liczba s_0 jest pierwiastkiem k -krotnym wielomianu f jeżeli wielomian f można przedstawić w postaci

$$f(s) = (s - s_0)^k g(s),$$

ale nie w postaci

$$f(s) = (s - s_0)^{k+1} g(s);$$

g jest wielomianem.

4.2. Wzory Viète'a

Niech f będzie wielomianem (rzeczywistym lub zespolonym) stopnia $n > 0$ postaci

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = a_n (s - s_1) \cdots (s - s_n).$$

Poniższe wzory ustalają związki pomiędzy współczynnikami wielomianu f , a jego pierwiastkami:

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} + s_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ s_1 s_2 + \dots + s_1 s_n + s_2 s_3 + \dots + s_2 s_n + \dots + s_{n-1} s_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ \vdots \\ s_1 s_2 \cdots s_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \end{cases}.$$

4.3. Równania algebraiczne

Równanie postaci

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0 \quad (4.3)$$

nazywamy **równaniem algebraicznym stopnia n** . Zauważmy, że równanie (4.3) jest uogólnieniem równania $z^n = c$, którego rozwiązanie było treścią poprzedniego wykładu (zob. Rozdział 3, Podrozdział 3.3). Z poprzednich rozważań wynika, że równanie (4.3) ma zawsze n rozwiązań (liczonych z krotnościami).

4.3.1. Równania algebraiczne stopnia pierwszego

Dla $n = 1$ jedynym rozwiązaniem równania (4.3) jest $x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$.

4.3.2. Równania algebraiczne stopnia drugiego

Dla $n = 2$ lewą stronę równania (4.3) możemy sprowadzić do postaci kanonicznej

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2 \left(x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} + a_0 = a_2 \left(x + \frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_1^2 - 4a_2 a_0}{4a_2}.$$

W przypadku, gdy wyróżnik $\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0$ jest rzeczywisty i nieujemny, rozwiązania równania (4.3) możemy wyrazić w postaci

$$x_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}, \quad x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}.$$

Jeżeli wyróżnik $\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0$ jest ujemny rozwiązania te przyjmują postać

$$x_1 = \frac{-a_1 - i\sqrt{4a_2 a_0 - a_1^2}}{2a_2}, \quad x_2 = \frac{-a_1 + i\sqrt{4a_2 a_0 - a_1^2}}{2a_2}.$$

W ogólnym przypadku, przyjmując że $\sqrt{\Delta} = \{\delta, -\delta\}$ mamy

$$x_1 = \frac{-a_1 - \delta}{2a_2}, \quad x_2 = \frac{-a_1 + \delta}{2a_2}.$$

4.3.3. Równania algebraiczne stopnia trzeciego

Aby uzyskać ogólne wzory na rozwiązania równania algebraicznego stopnia trzeciego wygodnie jest przyjąć, nie tracąc ogólności, że $a_3 = 1$:

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0. \quad (4.4)$$

Dokonując podstawienia $x = y - \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ jest tu parametrem; y to nowa zmienna) równanie (4.4) przekształcamy do postaci

$$\begin{aligned} 0 &= (y - \lambda)^3 + a_2 (y - \lambda)^2 + a_1 (y - \lambda) + a_0 \\ &= y^3 + y^2 (a_2 - 3\lambda) + y (3\lambda^2 - 2a_2 \lambda + a_1) - \lambda^3 + a_2 \lambda^2 - a_1 \lambda + a_0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Przyjmując $\lambda = \frac{a_2}{3}$ równanie (4.5) przyjmuje postać

$$y^3 + yp - q = 0, \quad (4.6)$$

gdzie $p = \frac{3a_1 - a_2^2}{3}$, $q = \frac{9a_1a_2 - 27a_0 - 2a_2^3}{27}$. Dokonując kolejnego podstawienia $y = z - \frac{p}{3z}$, po prostych przekształceniach równanie (4.6) prowadzi do równania

$$(z^3)^2 - qz^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0,$$

które jest równaniem algebraicznym stopnia drugiego względem niewiadomej $w = z^3$

$$w^2 - qw - \frac{1}{27}p^3 = 0.$$

Równanie to potrafimy już rozwiązać uzyskując poszukiwane rozwiązania dowolnego równania algebraicznego stopnia trzeciego – tzw. wzory Cardano.

4.3.4. Równania algebraiczne stopnia czwartego

Podobnie jak w przypadku równań algebraicznych stopnia pierwszego, drugiego i trzeciego, istnieją ogólne wzory (uzyskane przez Ferrari, skradzione i opublikowane przez Cardano w *Ars Magna* w 1545 r.) pozwalające wyznaczać analityczną postać dowolnego równania stopnia czwartego.

4.3.5. Równania algebraiczne stopnia $n \geq 5$

Dla równań algebraicznych stopnia $n \geq 5$ wykazano, że podanie ogólnych wzorów na ich rozwiązania wykorzystujących wyłącznie działania dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie oraz pierwiastkowanie nie jest możliwe (prace Abela, Ruffiniego, Galois'a)!

Ciekawostka Liczba będąca rozwiązaniem równania algebraicznego o całkowitych współczynnikach nazywana jest **liczbą algebraiczną**. Na przykład $\sqrt[3]{2}$, jako rozwiązanie równania $s^3 - 2$, jest liczbą algebraiczną; z kolei liczby π , e czy $2^{\sqrt{2}}$ nie są liczbami algebraicznymi (dowody ich niealgebraiczności są bardzo trudne). Zbiór wszystkich liczb algebraicznych (a jest ich przeliczalnie wiele), z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb, tworzy ciało.