

Przestrzenie liniowe

5.1. Działania zewnętrzne

Niech X oraz F będą dwoma zbiorami niepustymi. Dowolną funkcję $D : F \times X \rightarrow X$ nazywamy **działaniem zewnętrznym** w zbiorze X nad zbiorem F .

Przykład 5.1. Niech $\mathcal{B}(A)$ oznacza zbiór wszystkich bijekcji $f : A \rightarrow A$. Funkcja $D : \mathbb{N} \times \mathcal{B}(A) \rightarrow \mathcal{B}(A)$ określona wzorem

$$D(n, f) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{\times n},$$

gdzie $\circ$ oznacza składanie odwzorowań, jest działaniem zewnętrznym w $\mathcal{B}(A)$ nad $\mathbb{N}$.

Przykład 5.2. Niech $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji określonych na zbiorze A i mających wartości w $\mathbb{R}$. Funkcja $D : \mathbb{R} \times \mathcal{F}(A, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ określona wzorem

$$D(\alpha, f) = \alpha f$$

jest działaniem zewnętrznym w $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ nad $\mathbb{R}$.

5.2. Przestrzeń liniowa (wektorowa)

Niech $(F, +, \cdot)$ będzie ciałem (możemy myśleć, że jest to ciało liczb rzeczywistych lub zespolonych) oraz niech X będzie dowolnym zbiorem.

Definicja 5.1. Trójkę $(X, \oplus, \odot)$ nazywamy **przestrzenią wektorową (liniową) nad ciałem** $(F, +, \cdot)$ jeżeli:

- (a) $\oplus$ jest działaniem wewnętrznym w X , takim że struktura $(X, \oplus)$ jest grupą abelową;

(b) $\odot$ jest działaniem zewnętrznym w X nad ciałem F , takim że równości:

- $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$;
- $(\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x)$;
- $\alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x$;
- $1 \odot x = x$

zachodzą dla dowolnych $x, y \in Y$ oraz $\alpha, \beta \in F$.

Elementy przestrzeni wektorowej nazywamy **wektorami**; elementy ciała nazywamy **skalarami**.

Przykład 5.3. Każda z poniższych struktur jest przestrzenią wektorową nad podanym ciałem:

a) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami dodawania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \stackrel{df}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) \stackrel{df}{=} (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n);$$

b) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb;

c) $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{C}$ z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb zespolonych;

d) $(\mathcal{F}(A, \mathbb{R}), +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę.

Przykład 5.4. Poniższe struktury nie są przestrzeniami wektorowymi nad podanymi ciałami:

a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{C}$ z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb;

b) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$ z działaniami zdefiniowanymi poniżej:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\alpha x_1, 0, \dots, 0);$$

c) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(0) = 1\}$ nad ciałem $\mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę.

Łatwo wykazać, korzystając z Definicji 5.1, że w dowolnej przestrzeni wektorowej $(X, +, \cdot)$ nad ciałem F prawdziwe są następujące zależności:

- $0 \cdot x = \alpha \cdot 0 = 0$;
- $\alpha \cdot x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ lub $x = 0$;
- $-(\alpha \cdot x) = (-\alpha) \cdot x = \alpha \cdot (-x)$

dla dowolnych $x \in X$, $\alpha \in F$.

Uwaga W powyższych warunkach występują dwa różne zera – jedno to element neutralny dla dodawania w grupie $(X, +)$, drugie to element neutralny dla dodawania w grupie $(F, +)$. Podobnie, znaki „ $-$ ” występujące w ostatnim warunku to dwa różne minusy – pierwszy oznacza element przeciwny dla elementu grupy $(X, +)$, drugi wskazuje element przeciwny w grupie $(F, +)$.

5.3. Podprzestrzeń liniowa

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F oraz niech $Y \subset X$.

Definicja 5.2. Jeżeli zbiór Y oraz działania $+$ i $\cdot$ przestrzeni X spełniają warunki:

- $x, y \in Y \Rightarrow x + y \in Y$;
- $\alpha \in F, x \in Y \Rightarrow \alpha \cdot x \in Y$;
- $Y \neq \emptyset$

to trójkę $(Y, +, \cdot)$ nazywamy podprzestrzenią liniową przestrzeni $(X, +, \cdot)$.

Warunki z powyższej definicji równoważne są poniższym dwóm:

- $\alpha, \beta \in F, x, y \in Y \Rightarrow \alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y$;
- $0 \in Y$.

Łatwo pokazać, że każda podprzestrzeń liniowa Y przestrzeni liniowej X jest przestrzenią liniową z działaniami indukowanymi z przestrzeni X .

Przykład 5.5. Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ będą dowolnymi ustalonymi liczbami. Zbiór

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k = 0 \right\}$$

z naturalnymi działaniami dodawania wektorów oraz mnożenia wektora przez liczbę jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej z Przykładu 5.3.a.

Przykład 5.6. Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : \alpha \operatorname{Re} z + \beta \operatorname{Im} z = 0\}$ z naturalnymi działaniami dodawania oraz mnożenia liczb zespolonych jest, dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej z Przykładu 5.3.b.

Przykład 5.7. Zbiór $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x f(x) = f(-x)\}$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej z Przykładu 5.3.d (dla $A = \mathbb{R}$).

Bezpośrednio z definicji wynika, że zbiór pusty tworzy przestrzeń liniową, ale nie jest on podprzestrzenią liniową żadnej przestrzeni.

Przykład 5.8. Niech $(X, +, \cdot)$ będzie niepustą przestrzenią liniową. Wówczas $(\{0\}, +, \cdot)$ jest najmniejszą (w sensie inkluzji) podprzestrzenią liniową przestrzeni $(X, +, \cdot)$.

5.4. Liniowa niezależność wektorów

Niech $(X, +, \cdot)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem F .

Definicja 5.3. Powiemy, że wektory $v_1, \dots, v_n \in X$ są **liniowo niezależne**, jeżeli dla dowolnych skalarów $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ zachodzi implikacja:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0. \quad (5.1)$$

Wektory, które nie są liniowo niezależne są **liniowo zależne**.

Wyrażenie $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ nazywamy **kombinacją liniową** wektorów $v_1, \dots, v_n$. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $v_1, \dots, v_n$ przestrzeni wektorowej X , tj. zbiór

$$\text{span} \{v_1, \dots, v_n\} \stackrel{\text{df}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i : \alpha_i \in F \ (i = 1, \dots, n) \right\}$$

tworzy podprzestrzeń liniową przestrzeni X (ćwiczenie).

Zauważmy, że zaprzeczenie warunku (5.1), tj. liniowa zależność wektorów $v_1, \dots, v_n$, oznacza, że przynajmniej jeden z tych wektorów jest kombinacją liniową pozostałych.

Przykład 5.9. Aby sprawdzić liniową zależność wektorów

$$v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (-1, 1, 1), v_3 = (3, -1, -3)$$

nad ciałem $\mathbb{R}$, należy rozwiązać, wynikające z warunku (5.1), równanie

$$\alpha_1 (1, 0, -1) + \alpha_2 (-1, 1, 1) + \alpha_3 (3, -1, -3) = (0, 0, 0)$$

ze względu na niewiadome $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$. Równanie to prowadzi do układu równań

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest: $\alpha_1 = -2t, \alpha_2 = \alpha_3 = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Oznacza to, że warunek (5.1) nie jest spełniony, czyli badane wektory są liniowo zależne. Faktycznie, z postaci rozwiązania wynika, że $v_2 = 2v_1 - v_3$.

5.5. Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Niech $v_1, \dots, v_n$ będą ustalonymi wektorami przestrzeni wektorowej X . Jeżeli każdy element przestrzeni X można wyrazić jako kombinację liniową wektorów $v_1, \dots, v_n$, tzn. dla dowolnego $y \in X$

$$y = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \tag{5.2}$$

dla pewnych $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, to mówimy, że wektory $v_1, \dots, v_n$ **generują przestrzeń** X . Każdy liniowo niezależny układ (ciąg – istotna kolejność) wektorów przestrzeni wektorowej X generujący tę przestrzeń nazywamy **bazą** tej przestrzeni. Liczbę elementów bazy przestrzeni wektorowej X oznaczamy $\dim X$ i nazywamy **wymiarem** przestrzeni wektorowej ⁽²⁾. Współczynniki $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ występujące w równaniu (5.2) nazywamy **współrzednymi** wektora y w bazie $v_1, \dots, v_n$.

² W sytuacji, gdy nie jest jasne nad jakim ciałem rozważamy daną przestrzeń liniową X , jej wymiar oznaczamy będziemy $\dim_F X$ wskazując, że jest to przestrzeń liniowa nad ciałem F .

Własności bazy przestrzeni wektorowej:

- (i) Każda nietrywialna przestrzeń wektorowa posiada bazę.
- (ii) Jeżeli wektory $v_1, \dots, v_n$ są bazą pewnej przestrzeni liniowej, to dla dowolnych niezerowych skalarów $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ wektory $\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n$ również są bazą tej przestrzeni.
- (iii) Wszystkie bazy tej samej przestrzeni wektorowej są równoliczne.
- (iv) Wektory $v_1, \dots, v_n$ n -wymiarowej przestrzeni liniowej są jej bazą wtedy i tylko wtedy, gdy są wektorami liniowo niezależnymi.
- (v) Każdy układ wektorów liniowo niezależnych przestrzeni wektorowej X może być rozszerzony do bazy przestrzeni X .

Przykład 5.10. Rozważmy przestrzeń liniową $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Dla dowolnego wektora $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mamy:

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1),\end{aligned}$$

zatem wektory $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^n$; ponieważ wektory te są również liniowo niezależne, więc stanowią one bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ – jest to tzw. **baza kanoniczna**. Wniosek: $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Przykład 5.11. Rozważmy przestrzeń liniową $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nad ciałem liczb rzeczywistych. Z postaci kanonicznej liczby zespolonej wynika, że każda liczba zespolona jest kombinacją liniową wektorów $1, i$; wektory te, w rozważanym przypadku (jaki to przypadek?), są liniowo niezależne, więc stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{C}$. Wniosek: $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Przykład 5.12. Rozważmy przestrzeń liniową $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, tym razem nad ciałem liczb zespolonych. Niech $z_0 \neq 0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Wówczas dla dowolnej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$:

$$z = \alpha_0 z_0, \quad \text{gdzie } \alpha_0 = z z_0^{-1}.$$

Oznacza to, że w rozważanym przypadku z_0 jest bazą przestrzeni $\mathbb{C}$. Wniosek: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

Ważnym wnioskiem wynikającym z dwóch ostatnich przykładów jest to, że **wymiar przestrzeni wektorowej zależy od ciała, nad którym przestrzeń ta jest rozważana**.

Przykład 5.13. Niech $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0, x + y + z = 0\}$. Łatwo wykazać, że Y jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$; wyznaczmy więc jej bazę. Rozwiązując układ równań wynikający z warunku określającego przynależność do przestrzeni Y , otrzymamy: $x = t, y = -t, z = 0$ ($t \in \mathbb{R}$). Dowolny element przestrzeni Y ma więc postać: $(t, -t, 0) = t(1, -1, 0)$. Oznacza to, że Y jest jednowymiarową podprzestrzenią przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której bazą jest wektor $(1, -1, 0)$.

Przykład 5.14. Niech Π_n oznacza zbiór wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż n . Łatwo sprawdzić, że struktura $(\Pi_n, +, \cdot)$, gdzie $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania funkcji oraz mnożenia funkcji przez liczbę, jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$. Bazę tej przestrzeni tworzą jednomiany: $1, x, x^2, \dots, x^n$; mamy więc: $\dim \Pi_n = n + 1$.

Niech teraz, dla $a \in \mathbb{R}$,

$$\Pi_n(a) = \{w \in \Pi_n : w(a) = 0\}.$$

Łatwo wykazać, że $\Pi_n(a)$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni Π_n . Z twierdzenia Bézout wynika, że dowolny element $w \in \Pi_n(a)$ można zapisać w postaci

$$w(x) = (x - a)g(x), \quad (5.3)$$

dla pewnego $g \in \Pi_{n-1}$. Ponieważ bazą Π_{n-1} są jednomiany $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$, zatem na podstawie (5.3), wielomian w jest kombinacją liniową wielomianów

$$x - a, x(x - a), x^2(x - a), \dots, x^{n-1}(x - a).$$

Wielomiany te są liniowo niezależne (dlaczego?), zatem stanowią bazę przestrzeni $\Pi_n(a)$. Wniosek: $\dim \Pi_n(a) = n$.

Ćwiczenie Wyznacz bazę przestrzeni $\Pi_n(a)$ w przypadku, gdy $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.