
Rozdział 6

Macierze

Funkcję, która każdej parze liczb naturalnych (i, j) ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$) przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $a_{ij} \in \mathbb{F}$, gdzie $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, nazywamy **macierzą** (rzeczywistą, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, zespoloną w drugim przypadku). Macierze zapisujemy w postaci prostokątnych tablic:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}; \quad (6.1)$$

będziemy też stosować uproszczoną notację $A = [a_{ij}]_{n \times m}$. Macierz (6.1) to macierz wymiaru $n \times m$ – ma ona n wierszy (poziome) i m kolumn (pionowe). Zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach z ciała $\mathbb{F}$ będziemy oznaczać $\mathbb{F}^{n \times m}$. Jeżeli $m = n$ to macierz nazywamy **macierzą kwadratową** stopnia n . **Macierz zerowa** to macierz złożona z samych zer: $\mathbf{0} = [0]_{n \times m}$. Macierz kwadratowa, której wszystkie elementy – za wyjątkiem być może tych stojących na przekątnej – są równe zero nazywamy **macierzą diagonalną**:

$$\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz diagonalną z jedynekami na przekątnej nazywamy **macierzą jednostkową** (ozn. I):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli wszystkie elementy macierzy kwadratowej stojące pod (nad) przekątną są równe zero to macierz tę nazywamy **macierzą trójkątną górną (trójkątną dolną)**. Macierze diagonalne są jednocześnie trójkątne górne i trójkątne dolne.

6.1. Działania na macierzach

6.1.1. Dodawania macierzy oraz mnożenie macierzy przez skalar

W zbiorze macierzy $\mathbb{F}^{n \times m}$ wprowadza się naturalne działania dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar:

- jeżeli $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ to $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n \times m}$;
- dla $\alpha \in \mathbb{F}$: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{n \times m}$.

Przykład 6.1. *Mamy*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zbiór macierzy prostokątnych ustalonego wymiaru (możemy dodawać tylko te macierze, które mają ten sam wymiar) z działaniami zdefiniowanymi powyżej jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.

6.1.2. Mnożenie macierzy

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times k}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{k \times m}$. Możemy wówczas zdefiniować macierz $C = [c_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times m}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m) \quad (6.2)$$

będącą iloczynem macierzy A i B ; ozn. $C = AB$.

Uwaga Aby można było wyznaczyć macierz AB , liczba kolumn macierzy A musi być równa liczbie wierszy macierzy B .

Przykład 6.2. *Mamy:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Własności iloczynu macierzy:

Zakładamy, że wymiary macierzy A, B, C występujących w poniższych warunkach są takie, że wszystkie wyrażenia mają sens.

(i) Działanie określone wzorem (6.2) jest:

- łączne: $A(BC) = (AB)C$;
- rozdzielne względem dodawania: $A(B + C) = AB + AC$;
- posiada element neutralny – jest nim macierz jednostkowa;

(ii) Na ogół: $AB \neq BA$;

(iii) $AB = 0 \nRightarrow A = 0$ lub $B = 0$;

(iv) $AB = AC \nRightarrow B = C$.

Ćwiczenie Do punktów (ii)–(iv) podać stosowne przykłady.

6.1.3. Macierz transponowana

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times m}$ będzie dowolną macierzą. Macierz $A^T \in \mathbb{F}^{m \times n}$, gdzie

$$A^T = [a_{ij}]^T \stackrel{df}{=} [a_{ji}],$$

nazywamy **macierzą transponowaną**.

Kolumny (wiersze) macierzy A są więc wierszami (kolumnami) macierzy A^T .

Własności operacji transponowania macierzy:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, dla $\alpha \in \mathbb{F}$;
- $(AB)^T = B^T A^T$, gdzie $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

6.1.4. Macierz sprzężona

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$ będzie dowolną macierzą. Macierz $A^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$ określoną wzorem

$$A^* = [a_{ij}]^* \stackrel{df}{=} [\overline{a_{ji}}],$$

nazywamy **macierzą sprzężoną**.

Własności operacji sprzężenia macierzy:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$;
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, dla $\alpha \in \mathbb{C}$;
- $(AB)^* = B^* A^*$, gdzie $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

6.2. Wyznacznik macierzy**6.2.1. Definicja aksjomatyczna**

Niech $\mathbb{F}^{n \times n}$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definicja 6.1. Funkcję $\det : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą warunki:

(i) dla macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] = [A_1, \dots, A_n]$, gdzie A_i oznacza i -tą kolumnę A , przekształcenie $A_i \rightarrow \det[A_1, \dots, A_n]$ ($i = 1, \dots, n$) jest liniowe, tzn. dla $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

$$\det[A_1, \dots, \alpha A_i + \beta B_i, \dots, A_n] = \alpha \det[A_1, \dots, A_i, \dots, A_n] + \beta \det[A_1, \dots, B_i, \dots, A_n];$$

(ii) $\det$ jest funkcją alternującą, tzn. dla $A_i = A_j$ (dla wszystkich $i \neq j$):

$$\det[A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n] = 0,$$

(iii) $\det(I) = 1$.

Kolumny macierzy $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ są elementami przestrzeni $\mathbb{F}^n$; możemy więc wyrazić je jako kombinacje liniowe wektorów bazy kononicznej $e_1, \dots, e_n$:

$$A_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left[\sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} e_{k_1}, \dots, \sum_{k_n=1}^n a_{k_n n} e_{k_n} \right] \stackrel{(i)}{=} \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_n=1}^n a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} \det[e_{k_1}, \dots, e_{k_n}] \\ &\stackrel{(ii)-(iii)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}, \end{aligned}$$

gdzie S_n to zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$; $\operatorname{sgn}(\sigma)$ to znak permutacji σ ⁽¹⁾.

Twierdzenie 6.1. Istnieje dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki (i)–(iii) Definicji 6.1; funkcja ta określona jest wzorem

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}. \quad (6.3)$$

Zauważmy, że jeżeli dla pewnego $i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) < i$, to dla pewnego $j \in \{1, \dots, n\} : \sigma(j) > j$. Stąd oraz ze wzoru (6.3) wynika następujący

Wniosek 6.2. Wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów z przekątnej.

Własności wyznacznika macierzy ($A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{F}$):

- $\det A = \det A^T$;
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$;
- jeżeli do któregoś wiersza (kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (kolumn) to wyznacznik się nie zmienia;
- zamiana kolejności dwóch wierszy (kolumn) zmienia znak wyznacznika na przeciwny.

¹ $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^s$, gdzie s to liczba transpozycji (transpozycja to zamiana kolejności dwóch elementów) tworzących permutację σ .

6.2.2. Metoda Laplace'a

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie dowolną macierzą kwadratową stopnia n .

Definicja 6.2. *Minorem* elementu a_{ij} macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy wyznacznik M_{ij} macierzy kwadratowej stopnia $n - 1$ utworzonej z macierzy A przez usunięcie z niej i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

Definicja 6.3. Liczbę $(-1)^{i+j} M_{ij}$, gdzie M_{ij} jest minorem elementu a_{ij} , nazywamy **dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} .

Twierdzenie 6.3 (Laplace). Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia $n \geq 2$:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{dla każdego } j = 1, \dots, n$$

oraz

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{dla każdego } i = 1, \dots, n.$$

Przykład 6.3. Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$, ze wzoru (6.3) otrzymujemy:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Przykład 6.4. Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$ zastosujemy metodę Laplace'a (do pierwszej kolumny). Mamy

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ & + (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} \\ & + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}. \end{aligned}$$

Ten sam wynik uzyskamy stosując tzw. schemat Sarrusa:

$$\begin{array}{ccccc} & + & & + & \\ & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & - & & - & & \end{array} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ciekawostka Stosując do macierzy kwadratowej stopnia n metodę Laplace'a obliczania wyznacznika, musimy obliczyć n wyznaczników macierzy stopnia $n - 1$; każdy z tych wyznaczników wymaga z kolei obliczenia $n - 1$ wyznaczników stopnia $n - 2$, itd. Obliczenie wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia n wymaga więc

obliczenia $\frac{1}{2}n!$ wyznaczników macierzy kwadratowych stopnia 2; dla macierzy stopnia $n = 20$ daje to ponad 10^{18} wyznaczników 2×2 . Najszybszy obecnie komputer w Polsce, wykonujący prawie $4 \cdot 10^{13}$ operacji na sekundę, potrzebowałby na obliczenie tego wyznacznika ponad 126 dni! **Dla dużych n metoda Laplace'a jest więc wysoce niepraktyczna.**

6.2.3. Metoda Gaussa

Metoda Gaussa obliczania wyznacznika polega na przekształceniu danej macierzy do postaci trójkątnej. W przekształceniu tym wykorzystujemy tylko te operacje, które nie zmieniają wartości wyznacznika.

Przykład 6.5. *Mamy:*

$$\left| \begin{array}{ccc|l} 2 & 3 & 1 & w_1 \rightarrow w_1 \\ 1 & 2 & 4 & w_2 \rightarrow w_2 - \frac{1}{2}w_1 \\ 2 & -2 & 1 & w_3 \rightarrow w_3 - w_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|l} 2 & 3 & 1 & w_1 \rightarrow w_1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & w_2 \rightarrow w_2 \\ 0 & -5 & 0 & w_3 \rightarrow w_3 + 10w_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc|l} 2 & 3 & 1 & \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \\ 0 & 0 & 35 & \end{array} \right| = 35.$$

Metoda Gaussa jest jedną z najbardziej efektywnych metod obliczania wyznaczników macierzy. Jej numerycznie akceptowalna wersja wymaga wykonania tylko około n^3 operacji arytmetycznych!

6.3. Macierz odwrotna

Definicja 6.4. *Macierz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ taką że $\det A \neq 0$ nazywamy **macierzą nieosobliwą**; w przeciwnym przypadku mówimy, że A jest **macierzą osobliwą**.*

Przypomnijmy, że iloczyn macierzy jest działaniem wewnętrznym w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n . Łatwo sprawdzić, że jest to również działanie łączne, którego elementem neutralnym jest macierz jednostkowa I_n stopnia n (dowód przez bezpośredni rachunek). Nasuwa się więc następujące pytanie: *Czy każda macierz kwadratowa posiada element odwrotny (względem mnożenia)?*

Przykład 6.6. *Niech*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że nie dla każdej macierzy istnieje element odwrotny.

Definicja 6.5. *Jeżeli dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ istnieje macierz $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$ taka że:*

$$AX = XA = I_n,$$

*gdzie I_n oznacza macierz jednostkową stopnia n , to macierz tę nazywamy **macierzą odwrotną** do macierzy A i oznaczamy A^{-1} .*

Twierdzenie 6.4. *Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby macierz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ posiadała macierz odwrotną jest warunek $\det A \neq 0$.*

Własności operacji odwracania macierzy ($A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$):

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ oraz $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

6.3.1. Algorytmy wyznaczania macierzy odwrotnej

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

Metoda macierzy dopełnień algebraicznych

Poniżej przedstawimy algorytm wyznaczania macierzy A^{-1} oparty na macierzy dopełnień algebraicznych.

Krok 1. Obliczamy $\det A$. Jeżeli $\det A = 0$ to macierz A^{-1} nie istnieje; jeżeli $\det A \neq 0$, przechodzimy do kroku drugiego.

Krok 2. Wyznaczamy macierz minorów $A_1 = [M_{ij}]$;

Krok 3. Wyznaczamy macierz dopełnień algebraicznych $A_2 = [(-1)^{i+j} M_{ij}]$;

Krok 4. Wyznaczamy macierz $A_3 = A_2^T$;

Krok 5. Wyznaczamy macierz $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_3$.

Przykład 6.7. Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ponieważ $\det A = -5$ zatem macierz odwrotna istnieje. Mamy więc:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_{ij}} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)^{i+j}} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \\ &\xrightarrow{T} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\det A}} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & -1 \\ 2/5 & 1/5 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1} \end{aligned}$$

Metoda Gaussa

Metoda Gaussa wyznaczania macierzy odwrotnej polega na tym, aby z danej macierzy uzyskać macierz jednostkową. Te same operacje, które wykonujemy na macierzy A przeprowadzamy jednocześnie na macierzy jednostkowej. W momencie gdy wyjściowa macierz przyjmuje postać macierzy jednostkowej, macierz jednostkowa staje się macierzą A^{-1} .

Przykład 6.8. Rozważmy ponownie macierz z poprzedniego przykładu. Mamy:

$$\begin{aligned}
 [A|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 - \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \rightarrow w_3 - w_2 \end{array} \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 + \frac{4}{5}w_2 \end{array} \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2/5 & -1/5 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_3 \rightarrow -w_3 \\ w_2 \rightarrow w_2 - \frac{5}{2}w_3 \\ w_1 \rightarrow w_1 + w_3 \end{array} \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 \rightarrow \frac{1}{2}w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 \end{array} \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 3/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_3 \rightarrow w_3 \\ w_2 \rightarrow \frac{2}{5}w_2 \\ w_1 \rightarrow w_1 + \frac{2}{5}w_2 \end{array} \\
 &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array} \right] = [I|A^{-1}].
 \end{aligned}$$

6.4. Rząd macierzy

Niech $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$. Można pokazać, że liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy jest taka sama jak liczba jej liniowo niezależnych wierszy. Liczbę tę, dla macierzy A , oznaczamy $\text{rank}(A)$ i nazywamy **rzędem** macierzy A .

Własności rzędu macierzy:

- dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$;
- dodanie do dowolnej kolumny (wiersza) macierzy kombinacji liniowej pozostałych kolumn (wierszy) nie zmienia jej rzędu;
- dowolna zmiana kolejności kolumn (wierszy) macierzy nie zmienia jej rzędu.

Przykład 6.9. Wyznamy rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Stosując metodę sprowadzania macierzy do postaci trójkątnej (zob. Rozdział 6.2.3, str. 26) mamy:

$$\begin{aligned}
 &\left[\begin{array}{cccc} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 + \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \rightarrow w_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right] \\
 &\left[\begin{array}{cccc} -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 - \frac{2}{3}w_2 \end{array} & \left[\begin{array}{cccc} -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -\frac{9}{2} & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Ponieważ tylko dwa pierwsze wiersze ostatniej macierzy są liniowo niezależne, zatem $\text{rank}(A) = 2$.

Twierdzenie 6.5. *Rząd macierzy A równy jest największemu stopniowi (wymiarowi) niezerowego minora macierzy A .*

Przykład 6.10. *Rozważmy ponownie macierz*

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ zatem $\text{rank}(A) \leq 3$. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

zatem $\text{rank}(A) \leq 2$. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

zatem $\text{rank}(A) = 2$.