

Równania liniowe

7.1. Przekształcenia liniowe

Niech X oraz Y będą dwiema niepustymi przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$.

Definicja 7.1. Funkcję $f : X \rightarrow Y$ spełniającą warunki:

- a) dla dowolnych $x_1, x_2 \in X : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;
- b) dla dowolnych $x \in X, \alpha \in \mathbb{F} : f(\alpha x) = \alpha f(x)$

nazywamy **przekształceniem liniowym**.

Przypuśćmy, że wymiary przestrzeni X oraz Y są skończone; niech $\dim X = n$ oraz $\dim Y = m$. Przyjmijmy, że wektory $e_1, \dots, e_n$ stanowią bazę przestrzeni X , a wektory $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m$ bazę przestrzeni Y . Z odwzorowaniem liniowym $f : X \rightarrow Y$ możemy wówczas stowarzyszyć macierz $A_f = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{m \times n}$, której i -tą kolumnę ($i = 1, \dots, n$) tworzą współrzędne wektora $f(e_i)$ wyrażonego jako kombinacja liniowa wektorów bazowych przestrzeni Y :

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}\tilde{e}_1 + a_{21}\tilde{e}_2 + \dots + a_{m1}\tilde{e}_m, \\ f(e_2) &= a_{12}\tilde{e}_1 + a_{22}\tilde{e}_2 + \dots + a_{m2}\tilde{e}_m, \\ &\vdots \\ f(e_n) &= a_{1n}\tilde{e}_1 + a_{2n}\tilde{e}_2 + \dots + a_{mn}\tilde{e}_m \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad A_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Przykład 7.1. Rozważmy odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ określone wzorem

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + z).$$

Przyjmując w przestrzeniach X oraz Y bazy kanoniczne mamy:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) = (1, 2) = \tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2, \\ f(e_2) &= f(0, 1, 0) = (1, 0) = \tilde{e}_1, \\ f(e_3) &= f(0, 0, 1) = (-1, 1) = -\tilde{e}_1 + \tilde{e}_2. \end{aligned}$$

Odwzorowanie f jest więc reprezentowane przez macierz

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

innymi słowy

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Przykład 7.2. Niech $F : \Pi_1 \rightarrow \Pi_2$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem:

$$F(f) = \{x \rightarrow 2xf(x) - f(x)\}.$$

Łatwo sprawdzić, że F jest odwzorowaniem liniowym. Przyjmując w przestrzeniach Π_1 oraz Π_2 bazy

$$\begin{aligned} w \Pi_1 : e_1(x) &= 1, e_2(x) = x \\ w \Pi_2 : \tilde{e}_1(x) &= 1, \tilde{e}_2(x) = x, \tilde{e}_3(x) = x^2 \end{aligned}$$

mamy:

$$\begin{aligned} F(e_1) &= F(1) = 2x - 1 = -\tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_2, \\ F(e_2) &= F(x) = 2x^2 - x = 0\tilde{e}_1 - \tilde{e}_2 + 2\tilde{e}_3. \end{aligned}$$

Przy przyjętych bazach, odwzorowanie F reprezentowane jest przez macierz

$$A_F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład 7.3. Rozważmy ponownie odwzorowanie F z Przykładu 7.2. Przyjmując w przestrzeni Π_1 bazę

$$\begin{aligned} e_1(x) &= x + 1, \\ e_2(x) &= x - 1, \end{aligned}$$

a w przestrzeni Π_2 bazę

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1(x) &= x - 1, \\ \tilde{e}_2(x) &= x + 1, \\ \tilde{e}_3(x) &= x^2, \end{aligned}$$

mamy

$$F(e_1) = F(x+1) = 2x(x+1) - (x+1) = 2x^2 + x - 1 = \tilde{e}_1 + 2\tilde{e}_3,$$

$$F(e_2) = F(x-1) = 2x(x-1) - (x-1) = 2x^2 - 3x + 1 = \alpha_{21}\tilde{e}_1 + \alpha_{22}\tilde{e}_2 + 2\tilde{e}_3.$$

Skalary α_{21}, α_{22} wyznaczymy rozwiązując równanie

$$-3x + 1 = \alpha_{21}(x-1) + \alpha_{22}(x+1).$$

Po prostych rachunkach otrzymujemy: $\alpha_{21} = -2, \alpha_{22} = -1$. Tym razem odwzorowanie F jest reprezentowane przez macierz

$$A_F = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Z powyższych przykładów wynika, że **postać macierzy reprezentującej odwzorowanie liniowe $f : X \rightarrow Y$ zależy od sposobu wyboru baz w przestrzeniach X, Y .**

7.2. Jądro i obraz odwzorowania liniowego

Niech $f : X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem liniowym, a $V \subset X$ i $W \subset Y$ dowolnymi podprzestrzeniami liniowymi. Łatwo sprawdzić (ćwiczenie), że zbiory

$$\begin{aligned} f(V) &= \{y \in Y : \exists x \in V : y = f(x)\}, \\ f^{-1}(W) &= \{x \in X : \exists y \in W : y = f(x)\} \end{aligned}$$

z działaniami indukowanymi z przestrzeni X oraz Y , są podprzestrzeniami liniowymi, odpowiednio, przestrzeni X oraz Y .

Definicja 7.2. Zbiór $\ker f = f^{-1}(\{0\})$ nazywamy **jądrem** odwzorowania f ; zbiór $\operatorname{Im} f = f(X)$ nazywamy **obrazem** odwzorowania f .

Z obserwacji poprzedzającej powyższą definicję wynika, że

- jądro odwzorowania liniowego $f : X \rightarrow Y$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni X ;
- obraz odwzorowania liniowego $f : X \rightarrow Y$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni Y .

Przy wyznaczaniu jądra oraz obrazu odwzorowania liniowego przydatne bywa następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7.1. Niech X oraz Y będą skończone wymiarowymi przestrzeniami liniowymi oraz niech $f : X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem liniowym. Wówczas

$$\dim X = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f. \quad (7.1)$$

Dowód: Niech $\dim \ker f = k$ oraz $\dim X = n$; oczywiście $k \leq n$. Przypuśćmy, że wektory $e_1, \dots, e_k$ tworzą bazę przestrzeni $\ker f$. Wektory te możemy uzupełnić o wektory $e_{k+1}, \dots, e_n$ tak, aby $\text{span}\{e_1, \dots, e_n\} = X$. Aby wykazać równość (7.1) wystarczy udowodnić, że $\text{Im } f = \text{span}\{f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\}$ oraz, że wektory $f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)$ są liniowo niezależne.

Niech $y \in \text{Im } f$. Oznacza to, że istnieje $x \in X$ dla którego $y = f(x)$. Ponieważ $x \in X = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ zatem

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i\right) + f\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i f(e_i), \end{aligned}$$

więc $\text{Im } f = \text{span}\{f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\}$.

Wykażemy teraz, że wektory $f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)$ są liniowo niezależne. Mamy

$$\sum_{i=k+1}^n \alpha_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i\right) = 0,$$

zatem $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i \in \ker f = \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$. Stąd, istnieją skalary $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dla których

$$\sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i,$$

lub równoważnie

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i e_i - \sum_{i=k+1}^n \alpha_i e_i = 0.$$

Z liniowej niezależności wektorów $e_1, \dots, e_n$ wynika, że $\alpha_i = 0$ ($i = 1, \dots, n$). ■

Z powyższego dowodu wynika, że $\text{Im } f = \text{span}\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$, gdzie $e_1, \dots, e_n$ jest dowolną bazą przestrzeni X . Niech A_f będzie macierzą odwzorowania f przy ustalonych bazach przestrzeni X oraz Y . Ponieważ i -ta kolumna macierzy A_f to współrzędne wektora $f(e_i)$ w ustalonej bazie przestrzeni Y , zatem liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy A_f równa jest liczbie liniowo niezależnych wektorów spośród wektorów $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

Twierdzenie 7.2. Niech X oraz Y będą skończone wymiarowymi przestrzeniami liniowymi, niech $f : X \rightarrow Y$ będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech A_f będzie macierzą odwzorowania f (przy ustalonych bazach przestrzeni X oraz Y). Wówczas

$$\dim \text{Im } f = \text{rank}(A_f).$$

Przykład 7.4. Rozważmy ponownie odwzorowanie z Przykładu 7.3:

$$F : \Pi_1 \ni f \rightarrow \{x \rightarrow 2xf(x) - f(x)\} \in \Pi_2.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} \ker F &= \{x \rightarrow ax + b : 2x(ax + b) - ax - b \equiv 0\} \\ &= \{x \rightarrow ax + b : 2ax^2 + (2b - a)x - b \equiv 0\} = \{0\}. \end{aligned}$$

Zatem

$$2 = \dim \Pi_1 = \dim \ker F + \dim \text{Im } F = 0 + \dim \text{Im } F.$$

Stąd $\text{Im } F = \text{span} \{e_1, e_2\}$, gdzie

$$\begin{aligned} e_1(x) &= F(1) = 2x - 1 \\ e_2(x) &= F(x) = 2x^2 - x = x(2x - 1). \end{aligned}$$

Ostatecznie $\text{Im } F = \Pi_2\left(\frac{1}{2}\right)$.

7.3. Układy równań liniowych

Rozważmy układ m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (7.2)$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}$ dla $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$; $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. W przypadku, gdy $b_1 = \dots = b_m = 0$ układ (7.2) nazywamy **układem jednorodnym**. Przyjmując oznaczenia:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

układ równań (7.2) możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$Ax = b. \quad (7.3)$$

7.3.1. Twierdzenie Cramera

W przypadku, gdy liczba równań układu (7.2) jest równa liczbie niewiadomych, macierz A jest macierzą kwadratową. Jeżeli jest to macierz nieosobliwa to układ równań (7.2) nazywamy *układem Cramera*. Rozwiązanie równania (7.3) – a więc i układu (7.2) – można wówczas prosto wyliczyć wykorzystując macierz A^{-1} :

$$x = A^{-1}b.$$

Rozwiązanie układu równań (7.2) można również wyrazić stosując **wzory Cramera**.

Twierdzenie 7.3 (Cramer). Niech $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{F}^n$. Jeżeli macierz A jest nieosobliwa, to układ równań (7.3) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (7.4)$$

macierz A_i oznacza macierz powstałą z macierzy A przez zastąpienie jej i -tej kolumny wektorem b .

Dowód: Niech a_i oraz I_i oznaczają i -te kolumny odpowiednio macierzy A oraz macierzy jednostkowej I_n . Wówczas

$$\begin{aligned}\frac{\det A_i}{\det A} &= \frac{\det [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n]}{\det A} \\ &= \det (A^{-1} [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n]) \\ &= \det [A^{-1}a_1, A^{-1}a_2, \dots, A^{-1}a_{i-1}, A^{-1}b, A^{-1}a_{i+1}, \dots, A^{-1}a_n] \\ &= \det [I_1, I_2, \dots, I_{i-1}, x, I_{i+1}, \dots, I_n] = x_i.\end{aligned}$$

■

Łatwo stwierdzić, że układ równań jednorodnych ma zawsze przynajmniej jedno rozwiązanie (jakie?). Z Twierdzenia Cramera wynika natomiast, że jeżeli jednorodny układ równań liniowych jest układem Cramera, to rozwiązanie to jest jego jedynym rozwiązaniem.

Przykład 7.5. Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}.$$

Mamy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det A = -3$ zatem jest to układ Cramera, którego rozwiązanie określa wzór (7.4):

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2}{-3}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = 2, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{5}{3}.$$

7.3.2. Twierdzenie Kroneckera–Capellego

Rozważmy, jak poprzednio, układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{F}^m$. Niech $U \in \mathbb{F}^{m \times (n+1)}$ będzie macierzą powstałą z macierzy A przez dołączenie do tej ostatniej dodatkowej kolumny – wektora b , tj.

$$U = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

Macierz U nazywamy *macierzą uzupełnioną*. Jest jasne, że $\text{rank } U \geq \text{rank } A$. Z postaci równania (7.2), które możemy zapisać w postaci:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

wynika, że układ równań $Ax = b$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy wektor b jest kombinacją liniową kolumn macierzy A . Warunek ten możemy równoważnie wyrazić jako równość $\text{rank } A = \text{rank } U$.

Twierdzenie 7.4 (Kroneckera-Capello). *Układ równań $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{F}^m$, ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{rank } A = \text{rank } U$. Ponadto:*

- jeżeli $\text{rank } A = \text{rank } U = n$ (n – liczba niewiadomych) to rozwiązanie to jest jedyne;
- jeżeli $\text{rank } A = \text{rank } U = r < n$ to rozwiązań jest nieskończenie wiele; wszystkie one dają się wyrazić jako funkcja zależna od $n - r$ parametrów.

Przykład 7.6. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}.$$

Mamy $n = 3$ oraz

$$U = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right].$$

Rzędy macierzy A oraz U wyznaczymy korzystając z metody eliminacji Gaussa:

$$\begin{aligned} \text{rank} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{array} \right] &= \text{rank} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right] \\ &= \text{rank} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $\text{rank } A = \text{rank } U = 2$. Z twierdzenia 7.4 wynika więc, że rozważany układ równań posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego ($n - \text{rank } A$) parametru. Wyznaczymy te rozwiązania.

Sposób 1. Mając wyjściowy układ równań sprowadzony do postaci trójkątnej, poszukiwane rozwiązanie wyznaczymy metodą systematycznego rugowania:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -3y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sposób 2. Skoro $\text{rank } A = 2$ to macierz A zawiera nieosobliwą podmacierz stopnia 2; odnajdujemy tę macierz w rozwiązywanym układzie równań. Równania, które nie wchodzi w skład tej macierzy odrzucamy, z kolei niewiadome, których wybrana podmacierz nie obejmuje, przerzucamy na drugą stronę równania i traktujemy jako parametry. Układ równań, jaki w ten sposób otrzymujemy, jest układem Cramera – do jego rozwiązania stosujemy wzory (7.4).

W naszym przypadku, ponieważ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

zatem układy równań

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x - y = -1 - 2z \end{cases}$$

są równoważne (mają te same rozwiązania). Stosując do tego ostatniego układu wzory (7.4), mamy:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - z & 1 \\ -1 - 2z & -1 \end{vmatrix}}{-3} = -z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - z \\ 2 & -1 - 2z \end{vmatrix}}{-3} = 1, \quad z \in \mathbb{R}.$$