

Postać Jordana macierzy

9.1. Macierz Jordana

Niech $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Macierz $J_r(\lambda) \in \mathbb{F}^{r \times r}$ postaci

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{F}$, nazywamy **kłatką Jordana** stopnia r . Oczywiście $J_1(\lambda) = [\lambda]$.

Definicja 9.1. Macierz blokową $J \in \mathbb{F}^{n \times n}$ postaci

$$J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

gdzie $n_1 + \dots + n_k = n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ oraz wszystkie niewypisane elementy macierzy J są zerami, nazywamy **macierzą Jordana**.

Skalary $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tworzące przekątną macierzy J są jej wartościami własnymi. Zauważmy również, że każda macierz diagonalna jest macierzą Jordana; wymiar każdej klatki Jordana J_{n_i} tworzącej przekątną tej macierzy jest równy jeden, tj. $J_{n_i} = [\lambda_i]$. Oznacza to, że każda macierz diagonalizowalna jest podobna do pewnej macierzy Jordana (zob. Rozdział 8, str. 40). Prawdziwe jest również dużo ogólniejsze

Twierdzenie 9.1. Niech $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ będzie dowolną macierzą. Istnieje wówczas macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ taka że

$$P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{n_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(\lambda_k) \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

oraz $n_1 + \dots + n_k = n$. Macierz Jordana J macierzy A jest wyznaczona w sposób jednoznaczny z dokładnością do kolejności klatek Jordana, które tworzą przekątną macierzy J . Ponadto, jeżeli macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ma tylko rzeczywiste wartości własne to macierz P , ustalająca podobieństwo A oraz J , również może być wybrana jako macierz o elementach rzeczywistych.

Przykład 9.1. Niech

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

dla $\varepsilon \neq 0$. Ponieważ $\sigma(A_\varepsilon) = \{0, \varepsilon\}$ zatem macierz A_ε jest diagonalizowalna. Łatwo wykazać, że

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = S_\varepsilon J_\varepsilon S_\varepsilon^{-1}.$$

Oznacza to, że macierz

$$J_\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

jest macierzą Jordana macierzy A_ε , dla dowolnego $\varepsilon \neq 0$. Jednak, jeżeli $\varepsilon \rightarrow 0$ to $J_\varepsilon \rightarrow [0]_{2 \times 2}$, podczas gdy macierzą Jordana macierzy A_0 jest macierz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 9.1. Macierz Jordana J wyznaczona dla macierzy A nie musi być funkcją ciągłą elementów macierzy A . Oznacza to trudności z konstrukcją numerycznie akceptowalnego algorytmu wyznaczania, dla zadanej macierzy A , odpowiadającą jej macierz Jordana.

9.1.1. Własności macierzy Jordana

Niech $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ będzie dowolną macierzą, a $J \in \mathbb{F}^{n \times n}$ jej macierzą Jordana.

Własność 1 Liczba k klatek Jordana tworzących macierz J jest równa liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych macierzy A .

Własność 2 Liczba klatek Jordana odpowiadających wartości własnej λ jest równa wymiarowi przestrzeni własnej macierzy A odpowiadającej tej wartości własnej (czyli liczbie liniowo niezależnych wektorów własnych odpowiadających wartości własnej λ). Suma stopni wszystkich tych klatek równa jest krotności wartości własnej λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego macierzy A .

Przykład 9.2. Rozważmy macierz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ postaci

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ zatem macierz ma dwie wartości własne: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Wyznamy wymiary przestrzeni własnych odpowiadających tym wartościom własnym. Mamy:

$$\begin{aligned} \dim V_{\lambda_1} &= \dim \{\ker(A - I)\} = 3 - \dim \{\operatorname{Im}(A - I)\} \\ &= 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1, \\ \dim V_{\lambda_2} &= \dim \{\ker(A - 2I)\} = 3 - \dim \{\operatorname{Im}(A - 2I)\} \\ &= 3 - \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Na podstawie Własności 1, macierz Jordana macierzy A składa się z dwóch klatek Jordana (możemy wybrać tylko dwa liniowo niezależne wektory własne). Na podstawie Własności 2, wartości własnej $\lambda_1 = 1$ odpowiada jedna klatka Jordana stopnia 1, wartości własnej $\lambda_2 = 2$ musi więc odpowiadać jedna klatka Jordana stopnia 2. Macierz Jordana macierzy A ma więc postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Przykład 9.3. Rozważmy macierz $J \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ postaci

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 2 & 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & & & & & \\ \hline & & & 2 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 2 & & & & & \\ \hline & & & & & 3 & 1 & & & \\ & & & & & 0 & 3 & & & \\ \hline & & & & & & & 3 & & \end{array} \right],$$

w której wszystkie niewypisane elementy są zerami. Macierz J jest macierzą Jordana. Posiada ona dwie wartości własne: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Z Własności 2 wynika, że dla każdej z nich można wybrać tylko pod dwa liniowo niezależne wektory własne.

Powyższy przykład pokazuje, że w celu wyznaczenia macierzy Jordana dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ o znanych wartościach własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, musimy umieć

znajdować liczbę $N(m, \lambda)$ klatek Jordana stopnia m ($1 \leq m \leq n$) odpowiadających wartości własnej λ macierzy A . Aby wyznaczyć tę liczbę, zdefiniujmy ciąg $r_k(\lambda)$:

$$r_k(\lambda) = \text{rank} \left((A - \lambda I)^k \right), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (9.2)$$

Oczywiście $r_0(\lambda) = \text{rank } I = n$. Zauważmy ponadto, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$:

$$\ker \left((A - \lambda I)^k \right) \subset \ker \left((A - \lambda I)^{k+1} \right). \quad (9.3)$$

Dzieje się tak, gdyż dla $x \in \ker \left((A - \lambda I)^k \right)$:

$$(A - \lambda I)^{k+1} x = (A - \lambda I) \left((A - \lambda I)^k x \right) = (A - \lambda I) 0 = 0,$$

skąd wynika, że $x \in \ker \left((A - \lambda I)^{k+1} \right)$.

Z warunku (9.3) wynika natychmiast, że

$$\dim \ker \left((A - \lambda I)^k \right) \leq \dim \ker \left((A - \lambda I)^{k+1} \right);$$

tym samym

$$\begin{aligned} r_k(\lambda) &= \text{rank} \left((A - \lambda I)^k \right) = n - \dim \ker \left((A - \lambda I)^k \right) \geq \\ &\geq n - \dim \ker \left((A - \lambda I)^{k+1} \right) = \text{rank} \left((A - \lambda I)^{k+1} \right) = r_{k+1}(\lambda). \end{aligned}$$

Ciąg $r_k(\lambda)$ określony wzorem (9.2) jest więc ciągiem nierosnącym. Oznacza to, że od pewnego miejsca ciąg $r_k(\lambda)$ musi się stabilizować (tzn. staje się ciągiem stałym).

Własność 3 Liczba $N(m, \lambda)$ klatek Jordana stopnia $m \geq 1$ odpowiadających wartości własnej λ jest równa:

$$N(m, \lambda) = r_{m-1}(\lambda) - 2r_m(\lambda) + r_{m+1}(\lambda). \quad (9.4)$$

Aby zilustrować powyższą własność rozważmy następujący przykład.

Przykład 9.4. Niech $J \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$ będzie macierzą z przykładu 9.3. Macierz J ma dwie wartości własne: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Ponieważ

- dla $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned}
 J - 2I &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 0 & 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & & 1 & & \\ \hline \end{array} \right] \\
 (J - 2I)^2 &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & & 1 & 2 & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & & 1 & & \\ \hline \end{array} \right] \\
 (J - 2I)^3 &= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & & & \\ & & & & & 1 & 3 & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & & & & & 1 & & \\ \hline \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

zatem $r_0(2) = 8, r_1(2) = 6, r_2(2) = 4$ oraz $r_k(2) = 3$ dla $k \geq 3$. Tym samym:

$$N(1, 2) = 8 - 12 + 4 = 0,$$

$$N(2, 2) = 6 - 8 + 3 = 1,$$

$$N(3, 2) = 4 - 6 + 3 = 1,$$

$$N(k, 2) = 0, \text{ dla } k \geq 4.$$

Oznacza to, że wartości własnej $\lambda_1 = 2$ odpowiadają dwie klatki Jordana: jedna stopnia 2 i jedna stopnia 3.

- dla $\lambda_2 = 3$:

$$J - 3I = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

$$(J - 3I)^2 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

zatem $r_0(3) = 8, r_1(3) = 6$ oraz $r_k(3) = 5$ dla $k \geq 2$. Tym samym:

$$N(1, 3) = 8 - 12 + 5 = 1,$$

$$N(2, 3) = 6 - 10 + 5 = 1,$$

$$N(k, 3) = 0, \text{ dla } k \geq 3.$$

Wartości własnej $\lambda_2 = 3$ odpowiadają więc dwie klatki Jordana: jedna stopnia 1 i jedna stopnia 2. Postać macierzy J potwierdza uzyskane wyniki.

Pewną niedogodnością faktoryzacji (tj. rozkładu) Jordana $A = PJP^{-1}$ jest to, że w przypadku macierzy rzeczywistej posiadającej nierzeczywiste wartości własne jej macierz Jordana jest macierzą nierzeczywistą. W praktyce, oznacza to konieczność poszukiwania innego rozkładu macierzy, nie tak prostego jak rozkład Jordana, ale prowadzącego do macierzy rzeczywistych.

9.2. Rzeczywista macierz Jordana

Niech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oraz niech λ i $\bar{\lambda}$ będzie parą nierzeczywistych sprzężonych wartości własnych macierzy A . Ponieważ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, zgodnie z (9.2),

$$r_k(\lambda) = \text{rank}(A - \lambda I)^k = \text{rank}(A - \bar{\lambda} I)^k = r_k(\bar{\lambda})$$

zatem liczba $N(m, \lambda)$ klatek Jordana stopnia m odpowiadających wartości własnej λ jest równa liczbie $N(m, \bar{\lambda})$ klatek Jordana stopnia m odpowiadających wartości własnej $\bar{\lambda}$. Oznacza to, że klatki Jordana $J_m(\lambda)$ oraz $J_m(\bar{\lambda})$, odpowiadające parze nierzeczywistych sprzężonych wartości własnych macierzy A , tworzące przekątną macierzy Jordana, muszą występować parami. Łatwo wykazać, że macierz

$$\begin{bmatrix} J_m(\lambda) & 0 \\ 0 & J_m(\bar{\lambda}) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}$$

jest podobna do macierzy

$$\begin{bmatrix} D(\lambda) & I_2 & & 0 \\ & D(\lambda) & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & D(\lambda) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}, \quad (9.5)$$

gdzie $D(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$ oraz I_2 to macierz jednostkowa stopnia 2; macierzą P ustalającą to podobieństwo jest stosownie wybrana macierz permutacji (zob. przykład 9.5).

Przykład 9.5. Rozważmy macierz

$$\begin{bmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\bar{\lambda}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Niech $I_n^{(i,j)}$ będzie macierzą powstałą z macierz jednostkowej I_n przez zamianę miejscami kolumn o indeksach i oraz j . Jest to tzw. macierz permutacji – pomnożenie dowolnej macierzy przez macierz $I_n^{(i,j)}$ z prawej (z lewej) strony powoduje zamianę miejscami kolumn (wierszy) o indeksach i oraz j . Wynika stąd, że $(I_n^{(i,j)})^{-1} = I_n^{(i,j)}$.

W rozważanym przypadku mamy

$$\begin{aligned} (I_4^{(2,3)})^{-1} \begin{bmatrix} J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & J_2(\bar{\lambda}) \end{bmatrix} I_4^{(2,3)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Wracając do rozważań, zauważmy, że dla macierzy S postaci

$$S = \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

dla której

$$S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix},$$

przyjmując $\lambda = a + ib$, mamy

$$\begin{aligned} SD(\lambda)S^{-1} &= SD(a + ib)S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & -i \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Przyjmując oznaczenie $C(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, łatwo stwierdzić, że macierz (9.5) jest podobna do macierzy rzeczywistej

$$C_m(a, b) = \begin{bmatrix} C(a, b) & I_2 & & 0 \\ & C(a, b) & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & C(a, b) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2m \times 2m}; \quad (9.6)$$

macierzą ustalającą to podobieństwo jest macierz blokowa diag $(S, \dots, S)$.

Otrzymane wyniki podsumujemy w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 9.2. *Dowolna macierz rzeczywista $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest podobna do macierzy rzeczywistej*

$$J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_{n_k}(\lambda_k) & \\ & & & C_{m_1}(a_1, b_1) \\ & & & & \ddots \\ & & & & & C_{m_l}(a_l, b_l) \end{bmatrix}, \quad (9.7)$$

w której $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ to rzeczywiste, a $a_1 + ib_1, \dots, a_l + ib_l$ nierzeczywiste wartości własne macierzy A ; rzeczywiste macierze blokowe $J_{n_i}(\lambda_i)$ to klatki Jordana macierzy A występujące w jej postaci Jordana, bloki $C_{m_i}(a_i, b_i)$ stopnia $2m_i$ są postaci (9.6); $n_1 + \dots + n_k + 2(m_1 + \dots + m_l) = n$.

Przykład 9.6. Niech $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ będzie macierzą dla której $\sigma(A) = \{1, 1 \pm i\}$ i taką że

$$N(1, 1+i) = N(1, 1-i) = 2.$$

Z rozważań poprzedzających twierdzenie wynika, że jeżeli λ jest nierzeczywistą wartością własną macierzy A to liczba $N(m, \lambda)$ równa jest liczbie macierzy postaci (9.5) stopnia $2m$ tworzących rzeczywistą macierz Jordana J_{real} macierzy A . Tym samym, w rozważanym przypadku macierze Jordana J oraz J_{real} mają postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \quad J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Przypuśćmy teraz, że dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, dla której $\sigma(A) = \{1, 1 \pm i\}$, mamy

$$N(2, 1+i) = N(2, 1-i) = 1.$$

W tym przypadku macierze Jordana J oraz J_{real} mają postać

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix}, \quad J_{\text{real}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$