

## Baza Jordana

Niech  $X$  będzie  $n$ -wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  lub  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . Rozważmy dowolny endomorfizm  $f : X \rightarrow X$ . Wiemy, że postać macierzy endomorfizmu zależy od wyboru bazy w przestrzeni  $X$ . Wiemy również, że jeżeli endomorfizm  $f$  jest diagonalizowalny, to jego macierz w bazie przestrzeni  $X$  złożonej z jego  $n$  liniowo niezależnych wektorów własnych jest macierzą diagonalną. Ponieważ nie każdy endomorfizm jest diagonalizowalny, zatem nasuwa się pytanie o to, jak prosta może być postać macierzy endomorfizmu niediagonalizowalnego. W szczególności, czy istnieje baza przestrzeni wektorowej  $X$ , w której macierz endomorfizmu  $f : X \rightarrow X$  jest macierzą Jordana?

**Przykład 10.1.** Rozważmy macierz  $J \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  postaci

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

gdzie  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Macierz  $J$  jest macierzą Jordana. Niech  $e_1, e_2, e_3, e_4$  będzie bazą 4-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni  $X$  oraz niech  $f : X \rightarrow X$  będzie endomorfizmem wyznaczonym przez macierz  $J$ . Z postaci macierzy  $J$  otrzymujemy

$$(a) \begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = e_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) = e_2 + \lambda e_3 \\ f(e_4) = e_3 + \lambda e_4 \end{cases}, \quad \text{lub równoważnie} \quad (b) \begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) - \lambda e_2 = e_1 \\ f(e_3) - \lambda e_3 = e_2 \\ f(e_4) - \lambda e_4 = e_3 \end{cases}.$$

Z równań tych wynika, że  $e_1$  jest wektorem własnym endomorfizmu  $f$  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ ; pozostałe wektory  $e_2, e_3, e_4$  spełniają równania

$$(f - \lambda \text{id})(e_{k+1}) = e_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Powyższy przykład sugeruje sposób konstrukcji bazy przestrzeni wektorowej, w której macierz endomorfizmu jest macierzą Jordana.

## 10.1. Wektory główne

Przy założeniach i oznaczeniach sformułowanych na początku rozdziału, przypuśćmy że  $\lambda \in \mathbb{F}$  jest wartością własną endomorfizmu  $f$ . Oznacza to, że dla endomorfizmu  $f$  istnieje co najmniej jeden wektor własny, który na potrzeby tego rozdziału oznaczmy  $v_\lambda^{(1)}$  i będziemy nazywać *wektorem głównym rzędu 1* odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ . Wektory główne rzędu  $k \geq 2$  zdefiniujemy indukcyjnie: przypuśćmy, że  $v_\lambda^{(k-1)} \in X$  jest wektorem głównym rzędu  $k-1$  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ .

**Definicja 10.1.** Jeżeli istnieje niezerowy wektor  $v_\lambda^{(k)} \in X$  spełniający warunek

$$(f - \lambda \text{id}_X) v_\lambda^{(k)} = v_\lambda^{(k-1)}, \quad (10.1)$$

to wektor ten nazywamy **wektorem głównym rzędu  $k$**  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ .

Powyższą definicję można również sformułować dla macierzy. Wektor własny  $v_\lambda^{(1)} \in \mathbb{F}^n$  macierzy  $A$  odpowiadający wartości własnej  $\lambda$  nazywać będziemy *wektorem głównym rzędu 1*. Przypuśćmy, że  $v_\lambda^{(k-1)} \in \mathbb{F}^n$  jest wektorem głównym rzędu  $k-1$  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ .

**Definicja 10.2.** Jeżeli istnieje niezerowy wektor  $v_\lambda^{(k)} \in \mathbb{F}^n$  będący rozwiązaniem równania

$$(A - \lambda I) v_\lambda^{(k)} = v_\lambda^{(k-1)}, \quad (10.2)$$

to wektor ten nazywamy **wektorem głównym rzędu  $k$**  odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$ .

**Przykład 10.2.** Rozważmy macierz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  postaci

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.3)$$

Ponieważ  $\varphi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$  zatem macierz  $A$  ma dwie różne wartości własne:  $\lambda_1 = 1$  oraz  $\lambda_2 = 2$ . Wyznamy dla tych wartości własnych wektory główne.

- Dla  $\lambda_1 = 1$ , rozwiązując równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy:  $x = y = 0, z \in \mathbb{R}$ ; wektor główny rzędu 1 ma więc postać  $v_{\lambda_1}^{(1)} = (0, 0, t)$ ,  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Aby wyznaczyć wektory główne rzędu 2 rozważmy, dla ustalonego  $t \neq 0$ , równanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Łatwo stwierdzić, że równanie to nie posiada rozwiązań. Oznacza to, że dla wartości własnej  $\lambda_1 = 1$  nie istnieją wektory główne rzędu  $k \geq 2$ .

- Dla  $\lambda_2 = 2$ , rozwiązując równanie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

otrzymujemy:  $x = z, y = 0$ ; wektor główny rzędu 1 ma więc postać  $v_{\lambda_2}^{(1)} = (t, 0, t)$ ,  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Aby wyznaczyć wektory główne rzędu 2, rozważmy, dla ustalonego  $t \neq 0$ , równanie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ t \end{bmatrix}.$$

Jego rozwiązaniem jest  $x = z, y = t$ ; wektor główny rzędu 2 ma więc postać  $v_{\lambda_2}^{(2)} = (r, t, r)$ ,  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Zauważmy, że postać wektora  $v_{\lambda_2}^{(2)}$  zależy od sposobu wyboru wektora  $v_{\lambda_2}^{(1)}$ . Aby wyznaczyć wektory główne rzędu 3, rozważmy, dla ustalonych  $t \neq 0$  oraz  $r \neq 0$ , równanie

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ t \\ r \end{bmatrix}.$$

Łatwo stwierdzić, że równanie to nie posiada rozwiązań, a tym samym nie istnieją dla wartości własnej  $\lambda_2 = 2$  wektory główne rzędu  $k \geq 3$ .

Podsumowując, dla macierzy  $A$  postaci (10.3) udało się wyznaczyć trzy liniowo niezależne wektory główne: jeden odpowiadający wartości własnej  $\lambda_1$  oraz dwa odpowiadające wartości własnej  $\lambda_2$ . Przyjmując na przykład  $t = r = 1$ , otrzymujemy

$$\begin{aligned} v_1^{(1)} &= (0, 0, 1), \\ v_2^{(1)} &= (1, 0, 1), \\ v_3^{(2)} &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Ustalając w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  bazę kanoniczną, macierz  $A$  określa endomorfizm  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x + y, 2y, x + y + z),$$

Wyznaczone powyżej wektory  $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$  są również bazą przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ , a zatem możemy zapytać o postać macierzy endomorfizmu  $f$  w tej właśnie bazie. Ponieważ

$$\begin{aligned} f(v_1^{(1)}) &= f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = v_1^{(1)} + 0v_2^{(1)} + 0v_2^{(2)}, \\ f(v_2^{(1)}) &= f(1, 0, 1) = (2, 0, 2) = 0v_1^{(1)} + 2v_2^{(1)} + 0v_2^{(2)}, \\ f(v_2^{(2)}) &= f(1, 1, 1) = (3, 2, 3) = 0v_1^{(1)} + v_2^{(1)} + 2v_2^{(2)}, \end{aligned}$$

więc macierz  $A_f$  endomorfizmu  $f$  w bazie złożonej z wektorów głównych macierzy  $A$  ma postać

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Jest to macierz Jordana macierzy  $A$ , którą w zupełnie inny sposób uzyskaliśmy w przykładzie 9.2 (zob. Rozdział 9, str. 43). Zauważmy również, że dla macierzy  $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , której kolumnami są wektory  $v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}$ , tj.

$$P = [v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, v_2^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

mamy

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = J.$$

Macierz  $P$  jest więc macierzą ustalającą podobieństwo między macierzą  $A$  oraz jej macierzą Jordana.

### Własności wektorów głównych:

- (i) Dla każdej wartości własnej istnieją wektory główne rzędu co najmniej 1.
- (ii) Wektory główne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne.
- (iii) Wektory główne różnych rzędów odpowiadające tej samej wartości własnej są liniowo niezależne.
- (iv) Dla wartości własnej  $\lambda$  o krotności  $r$  (krotności jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego) istnieje dokładnie  $r$  liniowo niezależnych wektorów głównych; wśród nich są wszystkie liniowo niezależne wektory własne odpowiadające wartości własnej  $\lambda$ .

Z powyższych własności wektorów głównych wynika, że dla dowolnego endomorfizmu  $f : X \rightarrow X$ , który posiada  $n$  wartości własnych (liczonych z krotnościami,  $n = \dim X$ ) istnieje baza przestrzeni  $X$  złożona z jego wektorów głównych. Ponadto, z zależności (10.1) wynika, że jeżeli  $v_\lambda^{(i)}$  jest wektorem

głównym rzędu  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) odpowiadającym wartości własnej  $\lambda$  endomorfizmu  $f$ , to

$$\begin{aligned} f(v_\lambda^{(1)}) &= \lambda v_\lambda^{(1)}, \\ f(v_\lambda^{(2)}) &= \lambda v_\lambda^{(2)} + v_\lambda^{(1)}, \\ &\vdots \\ f(v_\lambda^{(k)}) &= \lambda v_\lambda^{(k)} + v_\lambda^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Tym samym endomorfizm  $f$  zawężony do przestrzeni liniowej rozpiętej przez wektory  $v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}$  jest również endomorfizmem, tj.

$$f : \text{span} \{v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}\} \ni x \rightarrow f(x) \in \text{span} \{v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}\};$$

jego macierzą w bazie  $v_\lambda^{(1)}, \dots, v_\lambda^{(k)}$  jest klatka Jordana stopnia  $k$  mająca wartość własną  $\lambda$  na przekątnej. Oznacza to, że macierz endomorfizmu  $f$  w bazie złożonej z jego wektorów głównych jest **macierzą Jordana**. Bazę tę nazywamy **bazą Jordana** przestrzeni  $X$  względem endomorfizmu  $f$ .

## 10.2. Macierz przejścia

Niech  $X$  będzie  $n$ -wymiarową przestrzenią wektorową nad ciałem  $\mathbb{F}$ . Niech  $e = (e_1, \dots, e_n)$  oraz  $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$  będą dwiema bazami przestrzeni  $X$ . Każdy wektor bazy  $\tilde{e}$  możemy wyrazić jako kombinację liniową wektorów bazy  $e$ :

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + \dots + p_{n1}e_n, \\ \tilde{e}_2 &= p_{12}e_1 + p_{22}e_2 + \dots + p_{n2}e_n, \\ &\vdots \\ \tilde{e}_n &= p_{1n}e_1 + p_{2n}e_2 + \dots + p_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Otrzymaną w ten sposób macierz współczynników  $P = [p_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$  nazywamy **macierzą przejścia** ze *starej* bazy  $e$  do *nowej* bazy  $\tilde{e}$ . Zauważmy, że  $i$ -tą kolumnę macierzy przejścia tworzą współrzędne  $i$ -tego wektora nowej bazy jako kombinacji liniowej wektorów starej bazy. Macierz przejścia jest więc macierzą endomorfizmu

$$\text{id}_X : \text{span} \{e_1, \dots, e_n\} \ni x \rightarrow x \in \text{span} \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}.$$

Dowolny element  $x \in X$  możemy wyrazić jako kombinację liniową elementów bazy  $e$ , jak również bazy  $\tilde{e}$ . Poszukamy teraz zależności między tymi reprezentacjami. Mamy

$$x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \quad \text{oraz} \quad x = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j \tilde{e}_j. \tag{10.5}$$

Wykorzystując macierz przejścia mamy:

$$x = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j \tilde{e}_j = \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_j \left( \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n p_{ij} \tilde{\alpha}_j \right) e_i.$$

Stąd oraz z postaci rozwinięcia wektora  $x$  względem bazy  $e$  wynika zależność między współrzędnymi wektora względem starej oraz nowej bazy:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \ddots & & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_n \end{bmatrix}. \quad (10.6)$$

Zależność tę możemy ująć krótko:

$$\alpha = P\tilde{\alpha}, \quad (10.7)$$

gdzie  $\alpha$  (odpowiednio  $\tilde{\alpha}$ ) to wektor współrzędnych  $x$  względem starej (nowej) bazy, a  $P$  to macierz przejścia z pierwszej bazy do drugiej. Zauważmy również, że z równania (10.7) wynika:

$$\tilde{\alpha} = P^{-1}\alpha,$$

co oznacza, że macierzą przejścia z bazy nowej to starej jest macierz  $P^{-1}$ .

**Przykład 10.3.** Rozważmy w  $\mathbb{R}^2$  dwie bazy: starą  $e_1 = (1, 2), e_2 = (0, 1)$  oraz nową  $\tilde{e}_1 = (1, 1), \tilde{e}_2 = (-1, 1)$ . Wyznamy macierz przejścia z bazy starej do nowej. Mamy

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= (1, 1) = p_{11}(1, 2) + p_{21}(0, 1) = (p_{11}, 2p_{11} + p_{21}) \\ \tilde{e}_2 &= (-1, 1) = p_{12}(1, 2) + p_{22}(0, 1) = (p_{12}, 2p_{12} + p_{22}) \end{aligned}$$

skąd wynika, że:  $p_{11} = 1, p_{21} = -1, p_{12} = -1, p_{22} = 3$ . Macierz przejścia ma więc postać:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Niech teraz  $(2, 1)$  będzie wektorem wyrażonym w starej bazie. Wyznamy jego współrzędne w nowej bazie. Mamy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Aby sprawdzić poprawność wyniku przedstawimy obydwa wektory w tej samej bazie kanonicznej  $k$ :  $k_1 = (1, 0), k_2 = (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} (2, 1)_e &= 2e_1 + e_2 = 2(1, 2) + (0, 1) = (2, 5)_k \\ (7/2, 3/2)_{\tilde{e}} &= \frac{7}{2}\tilde{e}_1 + \frac{3}{2}\tilde{e}_2 = \frac{7}{2}(1, 1) + \frac{3}{2}(-1, 1) = (2, 5)_k. \end{aligned}$$

### 10.3. Zmiana bazy, a postać macierzy odwzorowania liniowego

Na zakończenie tego rozdziału zbadamy jak zmienia się macierz odwzorowania liniowego wraz ze zmianą baz przestrzeni między którymi to odwzorowanie jest określone.

Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie odwzorowaniem liniowym oraz niech  $\dim X = n$ ,  $\dim Y = m$ . Przyjmując w przestrzeni  $X$  bazę  $e = (e_1, \dots, e_n)$ , a w przestrzeni  $Y$  bazę  $g = (g_1, \dots, g_m)$ , odwzorowanie  $f$  reprezentowane jest przez macierz  $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ , tj.

$$y = Ax. \quad (10.8)$$

Ustalając w przestrzeni  $X$  nową bazę  $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$  możemy wyznaczyć macierz przejścia z bazy  $e$  do bazy  $\tilde{e}$ ; oznaczmy ją przez  $P$ . Oczywiście  $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ . Podobnie, dokonując zmiany bazy w przestrzeni  $Y$  z  $g$  na  $\tilde{g} = (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m)$  możemy wyznaczyć macierz przejścia  $Q \in \mathbb{F}^{m \times m}$  z bazy  $g$  do  $\tilde{g}$ . Niech  $\tilde{x}$  (odpowiednio  $\tilde{y}$ ) będą współrzędnymi wektorów  $x$  (odp.  $y$ ) w nowych bazach przestrzeni  $X$  i  $Y$ . Otrzymujemy

$$x = P\tilde{x} \quad \text{oraz} \quad y = Q\tilde{y}.$$

Łącząc powyższe zależności z równaniem (10.8) mamy

$$Q\tilde{y} = AP\tilde{x},$$

lub równoważnie

$$\tilde{y} = Q^{-1}AP\tilde{x}.$$

Oznacza to, że w nowych bazach przestrzeni  $X$  oraz  $Y$  odwzorowanie  $f$  reprezentowane jest przez macierz  $Q^{-1}AP$ . W szczególności, jeżeli  $f : X \rightarrow X$  jest endomorfizmem reprezentowanym przez macierz  $A$  wyznaczoną w bazie  $e$  przestrzeni  $X$ , to macierzą tego endomorfizmu w bazie  $\tilde{e}$  jest macierz  $P^{-1}AP$ , gdzie  $P$  jest macierzą przejścia z bazy  $e$  do bazy  $\tilde{e}$ .

### 10.3.1. Baza złożona z wektorów własnych

Rozważmy endomorfizm  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ , gdzie  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  lub  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ; przestrzeń wektorową  $\mathbb{F}^n$  rozważamy nad ciałem  $\mathbb{F}$ . Przypuśćmy, że endomorfizm  $f$  jest diagonalizowalny. Oznacza to, że istnieje baza  $v$  przestrzeni  $\mathbb{F}^n$  złożona z wektorów własnych endomorfizmu  $f$ . Niech  $A$  będzie macierzą tego endomorfizmu w wybranej bazie przestrzeni  $\mathbb{F}^n$ . Z powyższych rozważań wynika, że jeżeli  $P$  jest macierzą przejścia z wybranej bazy przestrzeni  $\mathbb{F}^n$  do bazy  $v$ , to w tej nowej bazie endomorfizm  $f$  jest reprezentowany przez macierz diagonalną  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , gdzie  $\lambda_i$  jest wartością własną endomorfizmu  $f$  odpowiadającą wektorowi własnemu  $v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Macierzą ustalającą podobieństwo między macierzami  $A$  oraz  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  jest macierz  $P$ , tzn.

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Ponieważ  $i$ -tą kolumną macierzy  $P$  są współrzędne  $i$ -tego wektora bazy  $v$  względem starej bazy przestrzeni  $\mathbb{F}^n$ , zatem wybierając jako tę starą bazę bazę kanoniczną,  $i$ -tą kolumną macierzy  $P$  są współrzędne  $i$ -tego wektora własnego endomorfizmu  $f$ , tzn.  $P = [v_1, \dots, v_n]$  (zob. przykład 8.4 z Rozdziału 8, str. 41).

### 10.3.2. Baza Jordana

Jeżeli endomorfizm  $f : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$  nie jest diagonalizowalny to nie istnieje baza przestrzeni  $\mathbb{F}^n$  złożona z jego wektorów własnych. Zawsze możemy natomiast wyznaczyć bazę przestrzeni  $\mathbb{F}^n$  złożoną z jego wektorów głównych. Oznaczmy tę bazę

przez  $v$ . Wiemy, że w bazie tej macierz endomorfizmu  $f$  ma postać Jordana. Jeżeli  $A$  jest macierzą endomorfizmu  $f$  w innej bazie, a  $P$  jest macierzą przejścia z tej bazy do bazy złożonej z wektorów głównych, to wówczas

$$P^{-1}AP = J,$$

gdzie  $J$  jest macierzą Jordana endomorfizmu  $f$ . Wybierając jako tę starą bazę bazę kanoniczną,  $i$ -tą kolumną macierzy  $P$  są współrzędne  $i$ -tego wektora głównego endomorfizmu  $f$  (zob. przykład 10.2).

Na zakończenie rozważmy następujący

**Przykład 10.4.** Niech  $D : \Pi_3 \rightarrow \Pi_3$  będzie endomorfizmem określonym wzorem

$$D(f) = f'.$$

Wybierając w przestrzeni  $\Pi_3$  bazę  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = x$ ,  $e_3 = x^2$ ,  $e_4 = x^3$ , otrzymujemy:

$$D(e_1) = 0, \quad D(e_2) = e_1, \quad D(e_3) = 2e_2, \quad D(e_4) = 3e_3.$$

W bazie  $e_1, e_2, e_3, e_4$  przestrzeni  $\Pi_3$  macierz  $A$  endomorfizmu  $D$  ma więc postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ  $\varphi_A(\lambda) = \lambda^4$  zatem  $\lambda_0 = 0$  jest jedyną wartością własną macierzy  $A$  (endomorfizmu  $D$ ). Ponieważ

$$\dim \ker(A - \lambda_0 I) = \dim \ker A = 4 - \text{rank } A = 1,$$

zatem dla macierzy  $A$  istnieje tylko jeden liniowo niezależny wektor własny postaci  $(t, 0, 0, 0)$ ,  $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Macierz  $A$  nie jest więc diagonalizowalna. Wyznamy jej wektory główne. Dla ustalonego  $t \neq 0$ , mamy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika:  $x = r, y = t, z = w = 0$ , gdzie  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tym samym  $v^{(2)} = (r, t, 0, 0)$  jest wektorem głównym rzędu 2. Podobnie, dla ustalonych  $t \neq 0$  oraz  $r \neq 0$ , mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika:  $x = s, y = r, z = \frac{1}{2}t, w = 0$ , gdzie  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Tym samym  $v^{(3)} = (s, r, \frac{1}{2}t, 0)$  jest wektorem głównym rzędu 3. Musimy wyznaczyć jeszcze wektor główny rzędu 4. Mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ r \\ \frac{1}{2}t \\ 0 \end{bmatrix},$$

skąd wynika, że  $x = p, y = s, z = \frac{1}{2}r, w = \frac{1}{6}t$ , gdzie  $p, s, r, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ustalając  $p = s = 1, r = 2, t = 6$  otrzymujemy cztery liniowo niezależne wektory główne macierzy  $A$

$$v^{(1)} = (6, 0, 0, 0),$$

$$v^{(2)} = (2, 6, 0, 0),$$

$$v^{(3)} = (1, 2, 3, 0),$$

$$v^{(4)} = (1, 1, 1, 1).$$

Odpowiadają one czterem wektorom głównym endomorfizmu  $D$ :

$$v_1 = 6, \quad v_2 = 2 + 6x, \quad v_3 = 1 + 2x + 3x^2, \quad v_4 = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Łatwo stwierdzić, że macierz

$$P = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}, v^{(4)}] = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest macierzą przejścia z bazy  $e_1, e_2, e_3, e_4$  do bazy złożonej z wektorów głównych endomorfizmu  $D$ . Faktycznie,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = J.$$

Macierz Jordana  $J$  jest macierzą endomorfizmu  $D$  w bazie złożonej z jego wektorów głównych.