

Formy kwadratowe

Rozważmy rzeczywistą macierz symetryczną $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Definicja 12.1. Funkcję $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$h(x) = x^T A x \quad (12.1)$$

nazywamy **formą kwadratową**. Macierz symetryczną A występującą w powyższym równaniu nazywamy macierzą formy kwadratowej h .

Przyjmując $A = [a_{ij}]$, wzór (12.1) możemy równoważnie wyrazić w postaci

$$h(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Przykład 12.1. Odwzorowania

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

oraz

$$h_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3$$

są formami kwadratowymi o macierzach

$$A_{h_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad A_{h_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odwzorowania

$$g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \quad \text{oraz} \quad g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1$$

nie są formami kwadratowymi.

12.1. Określoność formy kwadratowej

W klasie wszystkich form kwadratowych szczególną rolę odgrywają formy określone.

Definicja 12.2. Formę kwadratową $h(x) = x^T A x$ nazywamy

- dodatnio określoną, jeżeli

$$x^T A x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$

- ujemnie określoną, jeżeli

$$x^T A x < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\};$$

- dodatnio półokreśloną, jeżeli

$$x^T A x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

- ujemnie półokreśloną, jeżeli

$$x^T A x \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$

- nieokreśloną, jeżeli nie zachodzi żaden z poprzednich warunków.

Przykład 12.2. Rozważmy ponownie formę kwadratową

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

Ponieważ $h_1(1, 1, 1) = -2$ oraz $h_1(1, 1, 0) = 2$, zatem forma kwadratowa h_1 jest nieokreślona. Forma kwadratowa

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

jest dodatnio określona; z kolei forma

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2$$

jest półokreślona dodatnio (dlaczego?).

12.2. Metody badania określoności formy kwadratowej

Poniżej przedstawione zostaną (bez dowodów) najczęściej stosowane metody badania określoności form kwadratowych.

12.2.1. Kryterium Sylwestera

Twierdzenie 12.1. Forma kwadratowa $h(x) = x^T A x$, gdzie $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, jest:

- 1) dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory wiodące macierzy A są dodatnie:

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad (j = 1, \dots, n);$$

2) ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(-1)^j D_j = (-1)^j \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{vmatrix} > 0, \quad (j = 1, \dots, n).$$

Przykład 12.3. Dla formy kwadratowej

$$h(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_3^2$$

mamy:

$$h(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ

$$D_1 = 3 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

zatem forma kwadratowa h jest dodatnio określona.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że z warunków $D_j \geq 0$ ($j = 1, \dots, n$) nie wynika dodatnia półokreśloność formy kwadratowej $h(x) = x^T A x$.

Przykład 12.4. Dla formy kwadratowej

$$h(x_1, x_2) = [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_2^2$$

mamy $D_1 \geq 0$ oraz $D_2 \geq 0$, podczas gdy forma kwadratowa h jest ujemnie półokreślona.

Twierdzenie 12.2. Forma kwadratowa $h(x) = x^T A x$, gdzie $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, jest:

1) dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie minory główne macierzy A są nieujemne, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_p} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p i_1} & a_{i_p i_2} & \cdots & a_{i_p i_p} \end{vmatrix} \geq 0,$$

dla $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, $1 \leq p \leq n$;

2) ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(-1)^p \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & \cdots & a_{i_1 i_p} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & \cdots & a_{i_2 i_p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{i_p i_1} & a_{i_p i_2} & \cdots & a_{i_p i_p} \end{vmatrix} \geq 0,$$

dla $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, $1 \leq p \leq n$.

Przykład 12.5. Dla formy kwadratowej

$$h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 2x_3^2 = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

mamy

- trzy minory główne stopnia jeden: $a_{11} = -1$, $a_{22} = -2$, $a_{33} = -2$;
- trzy minory główne stopnia dwa:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 > 0;$$

- jeden minor główny stopnia trzy:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Z twierdzenia 12.2 wynika, że forma kwadratowa h jest ujemnie półokreślona.

12.2.2. Kryterium wartości własnych

Można udowodnić, że rzeczywista macierz symetryczna A ma rzeczywiste wartości własne; oznaczmy je jako $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$. Niech v_i będzie wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej $\lambda_i(A)$ ($i = 1, \dots, n$) oraz przypuśćmy, że forma kwadratowa $h(x) = x^T A x$ jest dodatnio określona. Wówczas, dla $i = 1, \dots, n$:

$$0 < v_i^T A v_i = v_i^T \lambda_i(A) v_i = \lambda_i(A) v_i^T v_i = \lambda_i(A) \|v_i\|_2^2, \quad (12.2)$$

gdzie $\|v\|_2 = \sqrt{v^T v}$ jest normą w $\mathbb{R}^n$. Z warunku (12.2) wynika, że $\lambda_i(A) > 0$ ($i = 1, \dots, n$). Oznacza to, że jeżeli forma kwadratowa jest dodatnio określona to jej macierz ma dodatnie wartości własne. Łatwo o podobne zależności dla form określonych ujemnie oraz półokreślonych.

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 12.3. Niech $\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)$ będą wartościami własnymi macierzy $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wówczas forma kwadratowa $h(x) = x^T A x$ jest

1) dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lambda_i(A) > 0 \quad (i = 1, \dots, n);$$

2) ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lambda_i(A) < 0 \quad (i = 1, \dots, n);$$

3) dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lambda_i(A) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n);$$

4) ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lambda_i(A) \leq 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Przykład 12.6. Rozważmy formę kwadratową h z przykładu 12.5:

$$h(x_1, x_2, x_3) = [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (12.3)$$

Jej macierz ma trzy rzeczywiste wartości własne $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$. Z twierdzenia 12.3 wynika, że forma kwadratowa (12.3) jest ujemnie półokreślona.

12.2.3. Sprowadzenie do postaci kanonicznej (metoda Lagrange’a)

Prawdziwe jest następujące

Twierdzenie 12.4. Dla każdej macierzy symetrycznej $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ istnieje macierz nieosobliwa $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dla której macierz $P^T A P$ jest diagonalna.

Innymi słowy, dla każdej formy kwadratowej $h(x) = x^T A x$ istnieje nieosobliwe przekształcenie liniowe $x = Py$, dla którego forma kwadratowa $h(Py) = y^T P^T A P y$ przyjmuje postać kanoniczną, tj.

$$h(Py) = c_1 y_1^2 + \dots + c_n y_n^2, \quad (12.4)$$

dla pewnych skalarów $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Zauważmy, że forma kwadratowa zapisana w postaci kanonicznej (12.4) jest:

- dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i > 0$ ($i = 1, \dots, n$);
- ujemnie określona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i < 0$ ($i = 1, \dots, n$);
- dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$);
- ujemnie półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $c_i \leq 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Metoda Lagrange’a Formę kwadratową

$$h(x) = x^T A x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$$

możemy zapisać w postaci

$$h(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n).$$

Rozważmy trzy przypadki:

- $a_{ij} = 0$ dla wszystkich $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Wówczas $h(x) \equiv 0$, tzn. forma kwadratowa jest jednocześnie ujemnie oraz dodatnio półokreślona;

- $a_{ii} = 0$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz istnieją indeksy k, l dla których $a_{kl} \neq 0$. Niech e_k oraz e_l będą odpowiednio k -tym oraz l -tym wektorem bazy kanonicznej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Niech $v^+ = e_k + e_l$ oraz $v^- = e_k - e_l$. Wówczas

$$h(v^+) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i^+ v_j^+ = 2a_{kl}$$

$$h(v^-) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} v_i^- v_j^- = -2a_{kl}$$

skąd wynika, że w rozważanym przypadku forma kwadratowa h jest nieokreślona;

- $a_{ii} \neq 0$ dla pewnego indeksu i ; bez straty ogólności możemy przyjąć, że $i = 1$. Wówczas

$$\begin{aligned} h(x_1, \dots, x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^n a_{1j}x_j + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_i x_j \\ &= a_{11} \left(x_1^2 + 2x_1 \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right) + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_i x_j \\ &= a_{11} \left(x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 - a_{11} \left(\sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \right)^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n a_{ij}x_i x_j. \end{aligned}$$

Do formy kwadratowej h możemy teraz zastosować zamianę zmiennych:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \\ \vdots \\ y_n = x_n \end{cases} \quad \text{lub równoważnie} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1j}}{a_{11}} y_j \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ \vdots \\ x_n = y_n \end{cases}. \quad (12.5)$$

Równania (12.5) określają nieosobliwe przekształcenie liniowe postaci $x = Py$, gdzie

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

W wyniku zamiany zmiennych (12.5) otrzymujemy

$$h(x) = h(Py) = a_{11}y_1^2 + \tilde{h}(y_2, \dots, y_n),$$

gdzie $\tilde{h}$ jest formą kwadratową zmiennych $y_2, \dots, y_n$, do której ponownie stosujemy przedstawione rozumowanie rugując systematycznie kolejne zmienne i sprowadzając ją do postaci kanonicznej (lub wcześniej stwierdzając jej nieokreśloność).

Przykład 12.7. Rozważmy formę kwadratową

$$h(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3.$$

Stosując opisaną powyżej metodę Lagrange'a sprowadzimy ją do postaci kanonicznej. Mamy:

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3) &= -x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_2x_3 \\ &= -(x_1^2 - 2x_1x_2) + x_2^2 - 4x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 \\ &= -(x_1 - x_2)^2 + 2(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - 2x_3^2 \\ &= -(x_1 - x_2)^2 + 2(x_2 - x_3)^2 - 2x_3^2. \end{aligned}$$

Rozważana forma kwadratowa jest więc nieokreślona. Zauważmy ponadto, że dokonując zamiany zmiennych

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{lub równoważnie} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases},$$

która jest przekształceniem liniowym $x = Py$ o macierzy P postaci

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, x_3) &= [x_1 \ x_2 \ x_3] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= [y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= [y_1 \ y_2 \ y_3] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = -y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2. \end{aligned}$$

Jest to postać kanoniczna rozważanej formy kwadratowej ($c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = -2$).