

Elementy geometrii analitycznej w $\mathbb{R}^3$

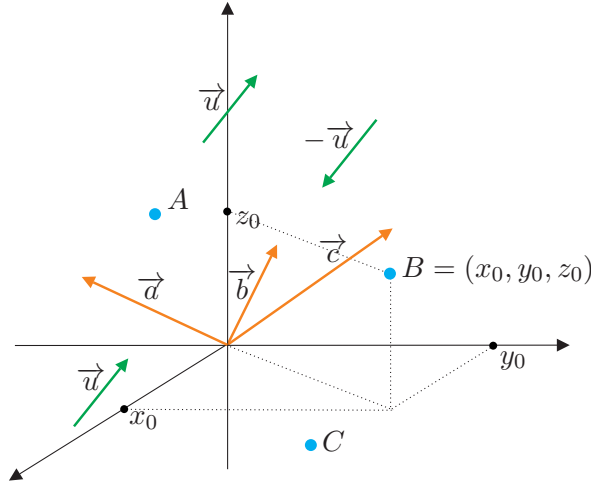
Elementy trójwymiarowej przestrzeni rzeczywistej $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ możemy interpretować co najmniej na trzy sposoby, tzn. jako:

- zbiór punktów (x, y, z) (Wykres 4, kolor niebieski); będziemy je oznaczać dużymi literami A, B, C itd. Liczby rzeczywiste x, y, z nazywamy współrzędnymi punktu $A = (x, y, z)$. Punkt nie jest wielkością wektorową – nie ma zwrotu, kierunku, długości.
- zbiór wszystkich wektorów zaczepionych $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{v}$ itd. (Wykres 4, kolor pomarańczowy). Wektory te mają wspólny początek w punkcie $O = (0, 0, 0)$. Każdy punkt $P = (x, y, z)$ wyznacza dokładnie jeden wektor wodzący $\vec{OP} = (x, y, z)$.
- zbiór wszystkich wektorów swobodnych $\vec{u}$, przy czym przez wektor swobodny $\vec{u}$ rozumiemy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w dowolnym punkcie, które mają tę samą długość, ten sam zwrot oraz ten sam kierunek co wektor $\vec{u}$ (Wykres 4, kolor zielony). Każde dwa różne punkty $A = (x_a, y_a, z_a)$ oraz $B = (x_b, y_b, z_b)$ wyznaczają dwa wektory swobodne

$$\vec{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a) \quad \text{oraz} \quad \vec{BA} = (x_a - x_b, y_a - y_b, z_a - z_b);$$

wektor $\vec{BA}$ nazywamy wektorem przeciwnym do wektora $\vec{AB}$. Punkt A (odpowiednio B) nazywamy początkiem (końcem) wektora $\vec{AB}$. Początek (koniec) danego wektora jest końcem (początkiem) wektora do niego przeciwnego.

⁰ Wykład przygotowany w oparciu o podręcznik: T. Jurlewicz, Z. Skoczylas *Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory* GiS, Wrocław 2008



Wykres 4. Punkty, wektory zaczepione, wektory swobodne.

Niech $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą dowolnymi wektorami oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas:

$$\vec{u} + \vec{v} \stackrel{df}{=} (x_u + x_v, y_u + y_v, z_u + z_v) \quad \text{oraz} \quad \alpha \cdot \vec{u} \stackrel{df}{=} (\alpha x_u, \alpha y_u, \alpha z_u).$$

Długość wektora $\vec{u}$ określamy wzorem:

$$\|\vec{u}\| \stackrel{df}{=} \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}.$$

13.1. Iloczyny wektorów: skalarny, wektorowy, mieszany

13.1.1. Iloczyn skalarny

Rozważmy dwa wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 13.1. Iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ oraz $\vec{v}$ to liczba (skalar) $\vec{u} \circ \vec{v}$ określona wzorem

$$\vec{u} \circ \vec{v} \stackrel{df}{=} \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}), \quad (13.1)$$

gdzie $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ to kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$; zakładamy, że $0 \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$.

Można wykazać, że jeżeli $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ to

$$\vec{u} \circ \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v. \quad (13.2)$$

Ze wzorów (13.1) oraz (13.2) wynika, że kąt między niezerowymi wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wyraża się wzorem

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v + z_u \cdot z_v}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2} \cdot \sqrt{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2}}.$$

Własności iloczynu skalarnego ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$):

- a) $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$;
- b) $\vec{u} \circ \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$;
- c) $(\alpha \cdot \vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \circ \vec{v})$;
- d) $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = (\vec{u} \circ \vec{w}) + (\vec{v} \circ \vec{w})$;
- e) $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ (nierówność Schwarza);
- f) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \circ \vec{v} = 0$ (warunek ortogonalności wektorów).

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu skalarnego.

Układ współrzędnych

Układem współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy trzy ustalone wzajemnie prostopadłe proste, przecinające się w jednym punkcie zwanym początkiem układu współrzędnych. Zwyczajowo proste te oznacza się Ox , Oy oraz Oz i nazywa się osiami układu współrzędnych $Oxyz$. Początkiem układu współrzędnych jest zazwyczaj punkt $(0, 0, 0)$. Geometria analityczna to geometria uprawiana w wybranym układzie współrzędnych.

13.1.2. Iloczyn wektorowy

Niech $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$ oraz $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$ będą dowolnymi wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 13.2. *Iloczynem wektorowym wektorów $\vec{u}$ oraz $\vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{u} \times \vec{v}$ określony wzorem*

$$\vec{u} \times \vec{v} \stackrel{\text{df}}{=} (y_u z_v - y_v z_u, x_v z_u - x_u z_v, x_u y_v - x_v y_u). \quad (13.3)$$

Łatwo sprawdzić przez bezpośredni rachunek, że wzór (13.3) można wyrazić w postaci symbolicznego wyznacznika

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix},$$

gdzie $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Można również wykazać, że

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ to kąt między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ ($0 \leq \angle(\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$).

Własności iloczynu wektorowego ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$):

- a) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$;
- b) $(\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$;
- c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$;
- d) $|\vec{u} \times \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$;

- e) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \{\vec{u} \parallel \vec{v} \vee \vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0}\}$ (warunek równoległości wektorów);
 f) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$.

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu wektorowego.

Przykład 13.1. Rozważmy trzy punkty $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 1)$. Punkty te są wierzchołkami pewnego trójkąta. Obliczmy jego pole. Zauważmy, że dwoma bokami trójkąt o wierzchołkach A, B, C są wektory $\vec{AB}$ oraz $\vec{AC}$. Jego pole P wyraża się więc wzorem

$$P = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AC}\| \cdot \sin \angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|.$$

Mamy więc

$$\vec{AB} = (1, -1, 1), \quad \vec{AC} = (1, 0, 1)$$

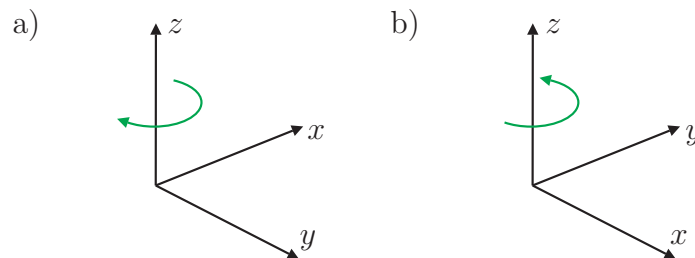
oraz

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k} = (-1, 0, 1).$$

Ostatecznie $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Orientacja układu współrzędnych

Rozróżniamy dwie orientacje układu współrzędnych $Oxyz$ – orientację dodatnią (układ prawoskrętny) oraz ujemną (układ lewoskrętny). Orientacja układu zależy od wzajemnego położenia osi układu Ox, Oy oraz Oz . Jeżeli wyprostowany kciuk prawej ręki umieścimy w ten sposób, aby wskazywał dodatnią część osi Oz , a zgięte palce wskażą kierunek obrotu od osi Ox do osi Oy (odpowiednio: od osi Oy do osi Ox) to wówczas mamy do czynienia z układem prawoskrętnym (lewoskrętnym).



Wykres 5. Orientacja układu współrzędnych: a) układ lewoskrętny, b) układ prawoskrętny.

Iloczyn wektorowy $\vec{u} \times \vec{v}$ dwóch niezerowych, niewspółliniowych wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ma tę własność, że orientacja trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych $Oxyz$.

13.1.3. Iloczyn mieszany

Niech $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\vec{w} = (x_w, y_w, z_w)$ będą dowolnymi elementami przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 13.3. *Iloczynem mieszanym uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ nazywamy liczbę $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ określoną wzorem*

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \stackrel{\text{df}}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}. \quad (13.4)$$

Łatwo wykazać, że iloczyn mieszany wektorów jest wyznacznikiem macierzy, której wiersze (lub kolumny) są współrzędnymi tych wektorów, tj.:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix}. \quad (13.5)$$

Własności iloczynu mieszanego ($\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}$):

- a) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$;
- b) $\alpha \cdot (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\alpha \cdot \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \alpha \cdot \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \alpha \cdot \vec{w})$;
- c) $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$;
- d) $|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$.

Ćwiczenie Uzasadnić powyższe własności iloczynu mieszanego.

13.1.4. Zastosowanie geometryczne iloczynu wektorowego oraz mieszanego

Niech $\vec{u} = (x_u, y_u, z_u)$, $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\vec{w} = (x_w, y_w, z_w)$. Iloczynы wektorowy oraz mieszany mają liczne interesujące zastosowania geometryczne. Można przy ich pomocy wyznaczać między innymi:

- ✓ **pole równoległoboku:** pole P równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wyraża się wzorem (zob. Wykres 6 a))

$$P = \|\vec{u} \times \vec{v}\|; \quad (13.6)$$

- ✓ **pole trójkąta:** pole P trójkąta rozpiętego przez wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ wyraża się wzorem

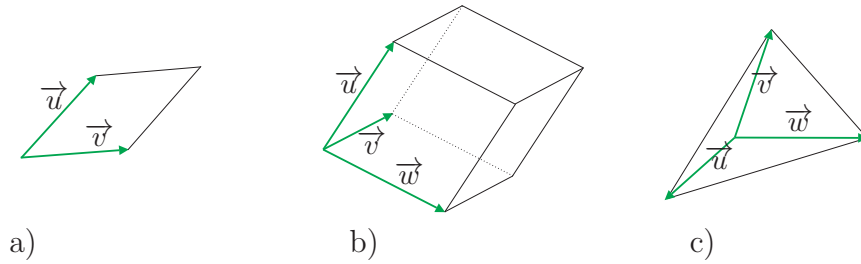
$$P = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|; \quad (13.7)$$

- ✓ **objętość równoległościanu:** objętość V równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ wyraża się wzorem (zob. Wykres 6 b))

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|; \quad (13.8)$$

- ✓ **objętość czworościanu:** objętość V czworościanu wyznaczonego przez wektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ wyraża się wzorem (zob. Wykres 6 c))

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|. \quad (13.9)$$



Wykres 6. Zastosowanie iloczynów wektorów: a) wektorowego; b) i c) mieszanego

Przykład 13.2. Aby obliczyć długość h wysokości trójkąta o wierzchołkach w punktach $A = (1, 1, 1)$, $B = (2, 2, 2)$, $C = (3, 4, 5)$ opuszczonej z wierzchołka C , możemy zastosować wzór (13.7). Mamy $\vec{AB} = (1, 1, 1)$, $\vec{AC} = (2, 3, 4)$ oraz

$$P = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cdot h.$$

Ponieważ

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (1, -2, 1)$$

zatem

$$h = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Przykład 13.3. Aby obliczyć długość h wysokości czworoboku o wierzchołkach $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 2, 3)$, $D = (3, 4, 5)$ opuszczonej z wierzchołka D , zastosujemy wzór (13.9). Mamy

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{1}{3} h \cdot P_{\triangle ABC},$$

gdzie $P_{\triangle ABC}$ to pole trójkąta o wierzchołkach w punktach A, B, C . Mamy $\vec{AB} = (1, 0, 0)$, $\vec{AC} = (0, 2, 3)$, $\vec{AD} = (3, 4, 5)$. Zatem

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0, -3, 2).$$

Stąd oraz ze wzoru (13.7) wynika, że $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \|(0, -3, 2)\| = \frac{\sqrt{13}}{2}$. Ponieważ

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -2,$$

zatem ostatecznie otrzymujemy

$$h = \frac{1}{2} \frac{|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})|}{P_{\triangle ABC}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

13.2. Płaszczyzna w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

13.2.1. Równanie normalne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ oraz prostopadłej do niezerowego wektora $\vec{n} = (A, B, C)$ ⁽¹⁾ ma postać

$$\pi : \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (13.10)$$

Jest to tzw. *równanie normalne* płaszczyzny.

Łatwo stwierdzić, że równanie

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, również opisuje płaszczyznę – jej wektorem normalnym jest wektor $\vec{n} = (A, B, C)$, a przechodzi ona przez punkty $P_1 = (-\frac{D}{A}, 0, 0)$, $P_2 = (0, -\frac{D}{B}, 0)$, $P_3 = (0, 0, -\frac{D}{C})$ (o ile oczywiście $ABC \neq 0$).

13.2.2. Równanie odcinkowe płaszczyzny

Równanie postaci

$$\pi : \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (13.11)$$

w którym $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nazywamy *równaniem odcinkowym* płaszczyzny π . Płaszczyzna opisana równaniem (13.11) przecina osie Ox, Oy oraz Oz układu współrzędnych $Oxyz$ w punktach równych odpowiednio $P_x = (a, 0, 0)$, $P_y = (0, b, 0)$, $P_z = (0, 0, c)$.

13.2.3. Równanie parametryczne płaszczyzny

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do dwóch niewspółliniowych (niezależnych na jednej prostej) wektorów $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$, $\vec{w} = (x_w, y_w, z_w)$ ma postać:

$$\pi : \quad \begin{cases} x = x_0 + rx_v + sx_w \\ y = y_0 + ry_v + sy_w \\ z = z_0 + rz_v + sz_w \end{cases} \quad , \quad \text{gdzie } r, s \in \mathbb{R}.$$

Jest to tzw. *równanie parametryczne* płaszczyzny.

13.2.4. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty

Każde trzy niewspółliniowe punkty P_1, P_2, P_3 wyznaczają dokładnie jedną płaszczyznę π , która je zawiera. Niech $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Punkt $P = (x, y, z)$ leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez punkty P_1, P_2, P_3 wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\vec{P_1P}$, $\vec{P_1P_2}$ oraz $\vec{P_1P_3}$ są liniowo zależne. Równanie poszukiwanej płaszczyzny π można więc wyrazić w postaci:

$$\pi : \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (13.12)$$

¹ Wektor prostopadły do płaszczyzny nazywamy *wektorem normalnym* płaszczyzny.

13.3. Prosta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

13.3.1. Równanie parametryczne prostej

Rozważmy dowolny punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ oraz niezerowy wektor $\vec{v} = (x_v, y_v, z_v)$. Równanie

$$l : \begin{cases} x = x_0 + tx_v \\ y = y_0 + ty_v \\ z = z_0 + tz_v \end{cases}, \quad \text{gdzie } t \in \mathbb{R} \quad (13.13)$$

jest równaniem prostej l przechodzącej przez punkt P i równoległej do wektora $\vec{v}$.

13.3.2. Równanie kierunkowe prostej

Przypuśćmy, że prosta l jest zapisana w postaci parametrycznej (13.13) oraz założmy, że żadna ze współrzędnych wektora $\vec{v}$ nie jest zerem. Wyliczając z każdego z trzech równań układu (13.13) parametr t , otrzymujemy równanie kierunkowe prostej:

$$l : \frac{x - x_0}{x_v} = \frac{y - y_0}{y_v} = \frac{z - z_0}{z_v}. \quad (13.14)$$

13.3.3. Równanie krawędziowe prostej

Rozważmy dwie nierównoległe płaszczyzny

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{oraz} \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Częścią wspólną tych płaszczyzn jest prosta

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}; \quad (13.15)$$

równanie (13.15) to jej *równanie krawędziowe*.

Zauważmy, że płaszczyzny π_1 oraz π_2 nie są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy ich wektory normalne $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ nie są równoległe, tj. $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq \vec{0}$. Wektor $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ jest jednocześnie wektorem kierunkowym (równoległym) prostej l .

13.4. Wzajemne położenie płaszczyzn i prostych

13.4.1. Kąt między płaszczyznami oraz prostymi

Przyjmuje się, że kąt między dwiema prostymi (dwoma płaszczyznami) to kąt jaki tworzą wektory kierunkowe tych prostych (wektory normalne płaszczyzn). Kąt między prostą i płaszczyzną, to kąt $\frac{\pi}{2} - \alpha$, gdzie α to kąt ostry jaki tworzą wektor kierunkowy prostej oraz wektor normalny płaszczyzny. Znając wektory normalne płaszczyzn oraz wektory kierunkowe prostych, szukane kąty można łatwo wyliczyć wykorzystując stosowne własności iloczynu skalarnego lub iloczynu wektorowego tych wektorów.

13.4.2. Odległość punktu od płaszczyzny

Łatwo wykazać, że odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (13.16)$$

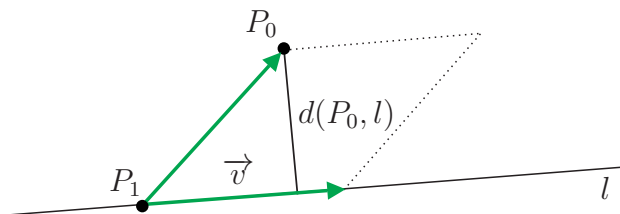
Ćwiczenie Uzasadnić powyższy wzór.

13.4.3. Odległość punktu od prostej

Można wykazać (zob. Wykres 7), że odległość punktu P_0 od prostej l przechodzącej przez punkt P_1 i równoległej do wektora $\vec{v}$ wyraża się wzorem

$$d(P_0, l) = \frac{\|\overrightarrow{P_1 P_0} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}. \quad (13.17)$$

Ćwiczenie Uzasadnić powyższy wzór.



Wykres 7. Odległość punktu P_0 od prostej l .

13.4.4. Odległość między płaszczyznami

Rozważmy dwie płaszczyzny równoległe $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$ oraz $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$ (płaszczyzny równoległe mają ten sam wektor normalny). Ze wzoru (13.16) wynika natychmiast, że odległość między tymi płaszczyznami wyraża się wzorem

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

13.4.5. Odległość między prostymi

Niech l_1 (odpowiednio l_2) będzie prostą przechodzącą przez punkt P_1 (odpowiednio P_2) równoległą do wektora $\vec{v}_1$ (odpowiednio $\vec{v}_2$).

Proste równoległe

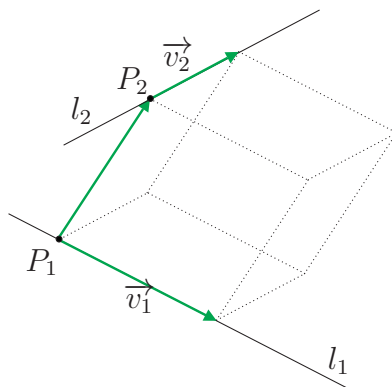
W przypadku, gdy proste l_1 i l_2 są równoległe (możemy wówczas przyjąć, że $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$), wzór na odległość między nimi wynika ze wzoru (13.17). Mamy

$$d(l_1, l_2) = \frac{\|\overrightarrow{P_1 P_2} \times \vec{v}_1\|}{\|\vec{v}_1\|}.$$

Proste skośne

Jeżeli proste l_1 i l_2 nie są równoległe (tzn. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \neq \vec{0}$), odległość między nimi obliczamy ze wzoru

$$d(l_1, l_2) = \frac{\left| \left(\overrightarrow{P_1 P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right) \right|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}.$$



Wykres 8. Odległość między prostymi l_1 i l_2 .