

Zadania egzaminacyjne

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin I – 03.02.2011

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Wyznacz sumę rozwiązań równania:

$$(8z + 1 - i)^2 - 2^7 iz^4 = 0.$$

Zadanie 2. Niech $u_0 = (1, 2, 1)$. Rozważmy odwzorowanie

$$f : \mathbb{R}^3 \ni v \rightarrow u_0 \times v \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.

a) Uzasadnij, że f jest endomorfizmem.

b) Wyznacz jądro oraz obraz endomorfizmu f .

Zadanie 3. Rozważmy dwie macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sprawdź, czy macierze A i B są podobne.

b) Wyznacz macierz $I + A^2 + A^4 + \dots + A^{100}$.

Zadanie 4. Rozważmy podprzestrzeń liniową

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0, x - 2y + z = 0\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, -1, 1)$ na podprzestrzeń V .

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ -1 & -a & 4 \end{pmatrix}$$

ma tylko nieujemne wartości własne.

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz zbiór:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg \frac{i}{(z + iz)^2} < \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Zadanie 2. W zbiorze $Z = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ wprowadzamy działanie $*$ określone wzorem $a * b = a + b - ab$. Sprawdź, czy struktura $(Z, *)$ jest grupą.

Zadanie 3. Wyznacz macierz Jordana endomorfizmu $F : \Pi_2 \ni f \rightarrow f + f' \in \Pi_2$.

Zadanie 4. Wyznacz wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których układ równań

$$\begin{cases} x + y = -a(1 + y) \\ 2x + y = ax - 2 \\ 2x + ay = 1 - a \end{cases}$$

posiada niezerowe rozwiązanie.

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny macierzy $u^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ na podprzestrzeń

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \text{ przestrzeni } \mathbb{R}^{2 \times 3}. \text{ Przyjmij iloczyn skalarny } [a_{ij}] \circ [b_{ij}] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{ij}.$$

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Dnia 10 lutego 2011 roku studenci pierwszego roku jednej z krakowskich uczelni zdawali pisemny egzamin z algebry liniowej. Każdy ze studentów uzyskał inną liczbę punktów. W grupie zdających wprowadzono dwa działania: r_1 , które z dwóch osób wybiera tę, która uzyskała lepszy wynik z egzaminu oraz r_2 , które z dwóch osób wybiera osobę młodszą (decyduje numer PESEL).

a) Sprawdź, czy struktura algebraiczna złożona z powyższej grupy studentów oraz działania r_1 jest grupą?

b) Sprawdź rozdzielnąść działania r_1 względem działania r_2 .

Zadanie 2. Prosta $y = ax + b$ przecina wykres funkcji $y = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 3x - 7$ w pięciu różnych punktach $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$. Pokaż, że liczba $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$ nie zależy od parametrów a i b .

Zadanie 3. Niech $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ będzie macierzą, taką że

$$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz $A^3 + (A^{-1})^3$ jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Zbadaj, w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, wymiar obrazu endomorfizmu $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$f(x, y, z) = \left(-2x + (-1 - a)y + z, ax - az, -x + (a + a^2)y + z \right).$$

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, 2, 3)$ na podprzestrzeń liniową $x + y + z = 0$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin I – 03.02.2012

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62$. Oblicz

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3}.$$

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}_*^{n \times m}$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach należących do zbioru $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. W zbiorze $\mathbb{R}_*^{n \times m}$ wprowadzamy działanie o określone wzorem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{nm}b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Czy struktura $(\mathbb{R}_*^{n \times m}, \circ)$ jest grupą abelową? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. Spośród rozwiązań równania

$$(z^3 - 27i) (z^2 - (3+i)z + 2 + 2i) = 0$$

wybierz te, które należą do zbioru $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Arg } z < \frac{\pi}{2}\}$.

Zadanie 4. Rozważmy odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ postaci

$$L(x, y, z) = (x + z, 3x + 2z, z).$$

Czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz A_L odwzorowania L jest diagonalna?

Odpowiedź uzasadnij; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz tę bazę.

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ iloczyn skalarny s określono wzorem:

$$s([a_{ij}], [b_{ij}]) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{ij}.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wektora

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

na podprzestrzeń $V = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : A = A^T\}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin II – 09.02.2012

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

W zbiorze $V = \{v \in \mathbb{R}^3 : (A - 6I)v = 0\}$ wprowadzamy działanie $\otimes$ określone wzorem

$$v_1 \otimes v_2 = (u_0 \times v_1) - (v_2 \times u_0),$$

gdzie $\times$ to iloczyn wektorowy. Sprawdź czy: a) działanie $\otimes$ jest wewnętrzne w zbiorze V ; b) działanie $\otimes$ jest przemienne; c) działanie $\otimes$ posiada element neutralny. Czy struktura algebraiczna $(V, \otimes)$ jest grupą?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie

$$\left(\sqrt[4]{32} \left(\sin \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8}\right) z + 1 + i\right)^2 + z^4 = 0$$

ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania poniższego układu równań

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ y + 3z - 3t = 1 \\ x + y + z - t = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 - a^2 \\ 1 & 0 & 1 + a^2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 5. Na rzeczywistej przestrzeni liniowej V :

$$V = \text{span} \{\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x\}$$

określono odwzorowanie liniowe $\mathcal{L} : f \rightarrow f + f'$. Wyznacz $\ker \mathcal{L}$, $\text{Im } \mathcal{L}$ oraz sprawdź, czy jest to endomorfizm na V ; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz również jego rzeczywiste wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin III – 24.02.2012

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór $G = \{(t, 2^t) : t \in \mathbb{R}\}$ wraz z działaniem $h((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + x_2 + 2, 4y_1y_2)$ tworzy grupę. Czy jest to grupa abelowa?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 3. Spośród wielomianów $v_1(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$, $v_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 2$, $v_3(x) = x$, $v_4(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ wyznacz te, które są liniowo niezależne; następnie uzupełnij je do bazy przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej cztery.

Zadanie 4. Czy macierze

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

są podobne? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz ustalającą to podobieństwo.

Zadanie 5. Wyznacz długość wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie A to punkt w którym prosta $l : \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z-6}{3}$ przecina płaszczyznę $\pi : 4(x+1) + 2y + 6z = 0$, a B to rzut ortogonalny, w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$, wektora $u = (1, -1, 6)$ na podprzestrzeń liniową $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 3z = 0\}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin I – 01.02.2013

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Wyznacz sumę oraz iloczyn wszystkich elementów zbioru $\sqrt[2013]{1+i}$.

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x + p^2y + z = -p \\ x + y - pz = p^2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie? Zbadaj liczbę jego rozwiązań w pozostałych przypadkach.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ dla których funkcja

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2a & -4 \\ -2 & a-1 & 0 \\ 2a & 0 & 2-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$$

przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, 0, 0)$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 6y - z = 0, -x + 2y + z = 0, 3x + 2y - 3z = 0 \right\}.$$

W przestrzeni V przyjmujemy naturalny iloczyn skalarny przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 5. Niech $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Uzasadnij, że jeżeli dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi $A^n = \mathbf{0}_{2 \times 2}$, to $A^2 = \mathbf{0}_{2 \times 2}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin II – 08.02.2013

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce

Zadanie 1. Uzasadnij, że punkty $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ stanowią wierzchołki trójkąta równobocznego o środku w punkcie $(0, 0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne spełniają następujące warunki:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \quad a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 - b_2b_3 = 0$$

$$b_1 + b_2 + b_3 = 0 \quad a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 = 0$$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $(z+a)^3 = i$ ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$; następnie zaznacz na płaszczyźnie zespolonej te wartości parametru $a \in \mathbb{C}$, dla których rozwiązania te należą do zbioru $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \text{Arg } z < \pi\}$.

Zadanie 3. Oblicz odległość punktu przecięcia się prostych $l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$ oraz $l_2 :$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ od podprzestrzeni liniowej } V \subset \mathbb{R}^3 \text{ rozpiętej przez wektory } u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, 1, 0).$$

Zadanie 4. Rozważmy endomorfizm $F : \pi_2 \ni f \rightarrow f(0) + f(1)x + f(-1)x^2 \in \pi_2$, gdzie π_2 to rzeczywista (tj. nad ciałem $\mathbb{R}$) przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż dwa z naturalnymi działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar. Sprawdź, czy endomorfizm F jest diagonalizowalny; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz dla niego bazę Jordana przestrzeni π_2 .

Zadanie 5. Rozważmy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ ortonormalną względem iloczynu skalarnego s . Wyznacz kąt, względem tego iloczynu skalarnego, pomiędzy wektorami $u = (1, 2, 3)$ oraz $w = (1, 1, 4)$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin III – 19.02.2013

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Niech $\mathcal{T}_3$ oznacza zbiór macierzy trójkątnych górnych wymiaru 3×3 z jedynkami na przekątnej. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(\mathcal{T}_3, \cdot)$ jest grupą; działanie $\cdot$ to iloczyn macierzy.

Zadanie 2. Sprawdź, czy macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ jest diagonalizowalna.

Zadanie 3. Wyznacz wektory własne endomorfizmu

$$F : \pi_2 \ni f(x) \rightarrow -f(x) + f'(x) - f''(x) + f(0) \in \pi_2,$$

gdzie π_2 to rzeczywista przestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż dwa z naturalnymi działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

Zadanie 4. Wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 2$. Oblicz wyznacznik macierzy $A^3 + A^2 - A - I$.

Zadanie 5. Spośród wektorów

$$v_1 = (1, 3, 1, -1), v_2 = (2, 4, 0, -6), v_3 = (0, 2, 2, 4), v_4 = (0, 1, -1, -5)$$

wybierz bazę rzeczywistej przestrzeni wektorowej

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - 3z + w = 0, 2x - y + z = 0\};$$

następnie uzupełnij ją do bazy przestrzeni

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x - 2z + w = 0\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin I – 04.02.2014

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. W zbiorze $K = (0, +\infty)$ wprowadzamy działania:

$$a \oplus b = ab, \quad a \odot b = a^{\ln b}.$$

Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(K, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4 - z^3 + (1 - i)z + i - 1 = 0.$$

Zadanie 3. Rozważmy odwzorowanie liniowe

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (-x + 3z, -3x - 4y - 3z, 9x + 5z) \in \mathbb{R}^3.$$

Sprawdź, czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu f ; w przypadku pozytywnej odpowiedzi, wyznacz jego macierz w tej bazie.

Zadanie 4. Czy odwzorowanie $f : \pi_3 \rightarrow \pi_2$ określone wzorem

$$f(\varphi)(t) = (t+1)\varphi''(t-1) + \varphi'(t+1)$$

jest liniowe? Jeżeli tak, wyznacz jego jądro oraz obraz.

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$) wektora $u = (2, 1, 2)$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 8y - \sqrt{2}z = 0, 2\sqrt{2}y - z = 0\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin II – 11.02.2014

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Przedstaw graficznie zbiór tych parametrów $a \in \mathbb{C}$ dla których wszystkie rozwiązania równania

$$z^2 + 2(a+i)z + a^2 + 2ai - 1 - i = 0$$

należą do zbioru $\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Arg } z < -\frac{\pi}{2}\}$.

Zadanie 2. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_2 dla endomorfizmu $F : \pi_2 \rightarrow \pi_2$ określonego wzorem

$$F : at^2 + bt + c \rightarrow (4a + 4b)t^2 + (2b - 2c + a)t + a + 2b + 2c.$$

Zadanie 3. Suma wyrazów w każdym wierszu macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest równa s . Uzasadnij, że s jest wartością własną macierzy A oraz wyznacz odpowiadający tej wartości własnej wektor własny.

Zadanie 4. Rozważmy dwie bazy przestrzeni π_n :

$$e : \{e_0 = 1, e_1 = 1 + x, e_2 = x + x^2, e_3 = x^2 + x^3, \dots, e_n = x^{n-1} + x^n\}$$

oraz

$$\tilde{e} : \{\tilde{e}_0 = x^n, \tilde{e}_1 = x^n + 1, \tilde{e}_2 = x^n + x, \tilde{e}_3 = x^n + x^2, \dots, \tilde{e}_n = x^n + x^{n-1}\}.$$

Wyznacz macierz P^{-1} , gdzie P oznacza macierz przejścia od bazy e do bazy $\tilde{e}$.

Zadanie 5. Wyznacz odległość prostej l od płaszczyzny π , jeżeli

$$l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \pi : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = -2 + t - 2s \\ z = 3 + 2t - s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin III – 18.02.2014

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Wyznacz liczbę tych elementów zbioru $\sqrt[2016]{2014i}$, które należą również do zbioru

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Zadanie 2. Sprawdź, czy macierz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna; następnie wyznacz macierz A^{2014} .

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 - \alpha & -2 \\ 1 - \alpha & 1 & \alpha \\ -2 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

ma jedynie nieujemne wartości własne.

Zadanie 4. Wyznacz bazę jądra oraz bazę obrazu odwzorowania liniowego

$$F : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (x + y - z, 2y - 2z, x - y + z, 3x) \in \mathbb{R}^4.$$

Zadanie 5. W przestrzeni π_2 iloczyn skalarny $\circ$ określono wzorem

$$(a_1 t^2 + b_1 t + c_1) \circ (a_2 t^2 + b_2 t + c_2) := a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wielomianu $u(t) = (t - 1)^2$ na podprzestrzeń $V = \{f \in \pi_2 : f\text{-funkcja parzysta}\}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin I – 03.02.2015

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z^4) - |z|^2 \operatorname{Im}(z^2) \leq 0 \right\} \\ \text{b)} \quad & B = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}[(z - iz)^2] \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Niech A będzie macierzą kwadratową o elementach rzeczywistych.

- Oblicz $\det(2A)$ wiedząc, że $\det(3A) = 54$ oraz $\det(4A) = 128$.
- Jakie wartości może przyjąć wyznacznik macierza A , jeżeli

$$A^T (AA^T)^{-1} (AA^T)^T - (\det A^2) [(\det A) A]^T = 0.$$

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których podany układ równań ma niezerowe rozwiązanie:

$$\begin{cases} a^2 x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 4z = a \end{cases}.$$

Zadanie 4. Wyznacz, o ile istnieją, te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ dla których macierze

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a - 1 & b \\ -6 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & b - 2 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

są podobne.

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Liczba $s_0 = 1 + i\sqrt{2}$ jest jednym z rozwiązań równania

$$s^6 - 2s^5 + 5s^4 - 4s^3 + 8s^2 - 4s + 6 = 0.$$

Wyznacz pozostałe rozwiązania tego równania oraz wybierz spośród nich te, które należą do zbioru $\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z \leq \pi\}$.

Zadanie 2. Wyznacz rzut ortogonalny, w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$, wektora $(1, 1, 1)$ na jądro odwzorowania liniowego $F : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (y - 2x + z, y - z, x - 2y + z) \in \mathbb{R}^3$.

Zadanie 3. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x - ay + z = 1 \\ -2x - y - z = 1 \\ 2x - y = 2 \\ -x - ay - 2z = 2 \end{cases}$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Niech $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ będzie macierzą postaci

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Sprawdź, czy macierz A jest diagonalizowalna.

(b) Wyznacz A^{2015} .

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1.

(a) Rozwiąż równanie w zbiorze liczb zespolonych: $z^3 = -8\bar{z}$.

(b) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby zespolone z spełniające warunek $|z^2 + 4| > |z - 2i|$.

Zadanie 2. Wyznacz macierz X spełniającą równanie

$$A + B^T(X^T)^{-1}A = \left[A^T \left((A^{-1} + B)^{-1} + I \right) \right]^T.$$

Zadanie 3. Rozważmy cztery punkty $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(1, 0, 1)$, $D(1, -1, 1)$. Wyznacz odległość pomiędzy prostymi l_{AB} oraz l_{CD} przechodzącymi odpowiednio przez punkty A, B oraz C, D .

Zadanie 4. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ 1-a & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ma jedynie nieujemne wartości własne.

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Niech $z_0, z_1, \dots, z_4$ będą pierwiastkami algebraicznymi stopnia 5 z 32. Oblicz

$$\sum_{k=0}^4 |2i - z_k|^2.$$

Zadanie 2. Wielomian $\varphi_A(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A . Wyznacz wielomiany charakterystyczne macierzy: a) $2A - I$, b) $(A + 2I)^T$, c) A^{-1} .

Zadanie 3. Niech

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 5 & 2 \\ b & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad v_1 = (1, 1, -1)^T.$$

Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których wektor v_1 jest wektorem własnym macierzy A . Następnie sprawdź, czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna.

Zadanie 4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z iloczynem skalarnym o określonym wzorem

$$x \circ y = x^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie iloczynu skalarnego $\circ$) wektora $u = (1, 3)^T$ na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez wektor $e = (1, 1)^T$.

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Wiedząc, że z jest liczbą zespoloną o argumentie głównym $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ oraz o module $|z| > 1$, znajdź argument główny liczby zespolonej $\frac{(-iz)^3}{1-|z|^2}$.

Zadanie 2. Wektory $y, v_2, v_3, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$, ortogonalną w sensie naturalnego iloczynu skalarnego o przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (tj. $v \circ w = v^T w$). Niech $x \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym niezerowym wektorem.

(a) Pokaż, że wektory $x, v_2, v_3, \dots, v_n$ są wektorami własnymi macierzy xy^T oraz wyznacz odpowiadające im wartości własne.

(b) Wykaż, że $\det(I_n - xy^T) = 1 - y^T x$.

Zadanie 3. Wyznacz liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2w = 1 \\ 2x + 4y + z - 2w = 2 \\ -x - 2y - 2z + 4w = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej $\varphi(x, y, z) = 2x^2 - 2xz + 2y^2 - 2yz + z^2$.

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Czy zbiór liczb niewymiernych z dołączoną liczbą 1, z naturalnym działaniem mnożenia liczb tworzy grupę? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2. Rozważmy odwzorowanie liniowe

$$F : \pi_3 \ni ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow (a + b - c)x^2 + (2b + d)x + 2c - b \in \pi_2.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wielomianu $u(x) = x^2 + 2x + 2$ na podprzestrzeń $\text{Im } F$ (tj. na obraz odwzorowania F) przestrzeni π_2 wyposażonej w iloczyn skalarny $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$.

Zadanie 3. Wyznacz sumę wszystkich liczb zespolonych z spełniających równanie $z^3 = (-2 + 2\sqrt{3}i)\bar{z}$.

Zadanie 4. Wykorzystując postać Jordana macierzy $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3i & 1 \end{pmatrix}$ wyznacz cztery różne macierze B spełniające równanie $B^2 = A$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin I – 31.01.2017

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Czy zbiór $G = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : |\det A| = 1\}$ z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę? Czy jest to grupa abelowa? Odpowiedzi pozytywne uzasadnij, negatywną poprzyj stosownym przykładem.

Zadanie 2. Czy każda macierz $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ spełniająca równanie $(A - I)^2(A + 2I) = 0$ jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których obraz $\text{Im } f$ odwzorowania liniowego

$$f : \mathbb{R}^4 \ni (x, y, z, w) \rightarrow (x + ay - z, 2x - 2y + aw, x - y - w) \in \mathbb{R}^3$$

tworzy płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ iloczyn skalarny zdefiniowano wzorem $A \circ B = \text{tr}(A^T B)$, gdzie $\text{tr}(\cdot)$ oznacza ślad macierzy. Wyznacz rzut ortogonalny macierzy I_2 (tj. macierzy jednostkowej wymiaru 2×2) na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez macierze $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ oraz $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin II – 07.02.2017

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Wykorzystując wzory Viète'a, znajdź wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = -1 - i \\ xy + xz + yz = 2 + i \\ xyz = -2 \end{cases}, \quad \text{w którym } x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Zadanie 2. Wyznacz macierz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ o wartościach własnych $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ oraz $\lambda_3 = 0$, którym odpowiadają wektory własne $v_{\lambda_1} = (1, 1, 1)^T$, $v_{\lambda_2} = (1, 0, 1)^T$ oraz $v_{\lambda_3} = (1, -1, 0)^T$. W rozwiązaniu wykorzystaj postać Jordana poszukiwanej macierzy.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których nierówność

$$x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} x \geq y^T \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} y$$

jest prawdziwa dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 4. Niech $v, w \in \mathbb{R}^3$ będą wektorami spełniającymi warunek $v \circ v = w \circ w = 1$, $v \circ w = \frac{1}{2}$, gdzie $\circ$ oznacza naturalny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$. Wyznacz ortonormalną bazę podprzestrzeni liniowej rozpiętej przez wektory v oraz w .

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin III – 15.02.2017

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n , dla których dokładnie dwa rozwiązania równania $z^n = 1 + i\sqrt{3}$ należą do zbioru $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Arg } z < \frac{\pi}{2}\}$. Wyznacz te rozwiązania.

Zadanie 2. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem stałym odwzorowania $f : X \rightarrow X$, jeżeli $f(x_0) = x_0$. Wyznacz wszystkie punkty stałe odwzorowania $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (2y + z, x + y - 3z, -x + 3y + z) \in \mathbb{R}^3$.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \geq 0$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1+a \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & a & 4 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 4. Niech $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Oblicz:

(a) $\det(A + B)$ wiedząc, że $\det B^T A = 2$ oraz $\det(B^{-1} + A^{-1}) = -3$;

(b) $\det(A^T B^{-1} - I)$ wiedząc, że $\det(B^T - A) = 5$, $\det(-B) = -\det B \neq 0$ oraz $B^4 = B$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin I – 29.01.2018

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu $f(x) = x^3 - (1 - i)x^2 - x - i$. Wyznacz $\Re(w)$, gdzie

$$w = \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \right)^{2018}.$$

Zadanie 2. Wiadomo, na podstawie twierdzenia Cayleya–Hamiltona, że wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej jest jej wielomianem zerującym. Wykorzystując ten fakt uzasadnij, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, dla których $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.

Zadanie 3. Sprawdź, czy istnieje baza przestrzeni π_2 (tj. wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż 2), w której macierzą endomorfizmu $F : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \rightarrow (2a - b)x^2 + 2bx + 2c + b \in \pi_2$ jest macierz

$$A_F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR

termin II – 05.02.2018

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Liczby z_1, z_2, z_3, z_4 to pierwiastki algebraiczne czwartego stopnia z liczby $z = 20 + 18i$. Wyznacz

$$w = (1 - z_1)^2 + (1 - z_2)^2 + (1 - z_3)^2 + (1 - z_4)^2.$$

Zadanie 2. Niech $a \neq b$ będą dowolnymi elementami. W zbiorze $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$, gdzie f_1, f_2 to funkcje prowadzące z $\{a, b\}$ w $\{a, b\}$ postaci

$$f_1(x) = \begin{cases} a, & \text{dla } x = a \\ b, & \text{dla } x = b \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} b, & \text{dla } x = a \\ a, & \text{dla } x = b \end{cases},$$

wprowadzamy działanie o składaniu odwzorowań, tj. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(\mathcal{F}, \circ)$ jest grupą abelową.

Zadanie 3. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_1 (tj. wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż jeden) dla endomorfizmu $F : \pi_1 \ni ax + b \rightarrow (3a - b)x + a + b \in \pi_1$. Sprawdź poprawność wyniku poprzez wyznaczenie macierzy reprezentującej endomorfizm F w uzyskanej bazie.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$) elementu $u = (6, 2, -4)^T$ na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez wektory $v_1 = (2, 0, -1)^T$, $v_2 = (1, -5, 2)^T$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka

termin III – 12.02.2018

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Podane liczby zespolone zapisz w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} z_1 &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n, & z_2 &= (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n, \\ z_3 &= (\sin \alpha + i \cos \alpha)^n, & z_4 &= (\sin \alpha - i \cos \alpha)^n. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Sprawdź, czy podane macierze są podobne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz P dla której $A = PBP^{-1}$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie miejsca zerowe wielomianu $\varphi(x) = x^6 + 1$; następnie przedstaw go jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego.

Zadanie 4. Niech $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ będzie macierzą postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2a + 1 & 3a \\ -1 & a & a + 1 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz zbiór tych parametrów $a \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \rightarrow x^T A x \in \mathbb{R}$ przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Liczby s_1, s_2, s_3, s_4 to pierwiastki wielomianu

$$f(s) = -s^4 + (1+i)s^3 + is + 1.$$

Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniających warunek $\sum_{k=1}^4 |\lambda + s_k|^2 < \sum_{k=1}^4 |\bar{\lambda} + s_k|^2$.

Zadanie 2. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których zbiór

$$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A = a\}$$

z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę.

Zadanie 3. Rozważmy endomorfizm $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (ax + y, 2y, bz - y) \in \mathbb{R}^3$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ to nieznanne parametry. Dobierz je w ten sposób, aby endomorfizm f posiadał jedną potrójną wartość własną; następnie sprawdź, czy jest on wówczas diagonalizowalny.

Zadanie 4. W przestrzeni π_3 (π_k – przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej k) wprowadzamy iloczyn skalarny

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^3 f^{(k)}(0) g^{(k)}(0),$$

gdzie $h^{(k)}$ oznacza k -tą pochodną h , $h^{(0)} = h$. Wyznacz rzut ortogonalny elementu $u(x) = (x+1)^3$ na podprzestrzeń π_2 .

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór rozwiązań równania $s^{2019} = 1$ z działaniem

$$h(s_1, s_2) = \overline{s_1 s_2}$$

tworzy grupę.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (ax + y, 2y, bz - y) \in \mathbb{R}^3$. Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których endomorfizm f jest diagonalizowalny.

Zadanie 3. Wyznacz bazy ortonormalne (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^3$) jądra oraz obrazu endomorfizmu z poprzedniego zadania. Przyjmij $a = b = 0$.

Zadanie 4. Punkt $x_0 \in X$ nazywam punktem statym odwzorowania $f : X \rightarrow X$ jeżeli $f(x_0) = x_0$. Zbadaj liczbę punktów statych odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \rightarrow (2x + (a-1)y + 2z + 1, x - y, 2x + 2y + (a+1)z - 2) \in \mathbb{R}^3$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające warunek $z^3 |z| = (4 - 4\sqrt{3}i)\bar{z}$.

Zadanie 2. Wyznacz, o ile istnieje, macierz o wektorach własnych

$$v_1 = (2, 1, 1)^T, v_2 = (-1, 1, 0)^T, v_3 = (3, 0, 1)^T.$$

Ile jest takich macierzy?

Zadanie 3. Rozważmy układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ oraz $b \in \mathbb{R}^2$.

Niech w_A oraz w_1, w_2 oznaczają wyznacznik macierzy A oraz wyznaczniki macierzy powstałych z macierzy A przez zastąpienie odpowiednio jej pierwszej i drugiej kolumny wektorem b . Co wiemy o liczbie rozwiązań układu równań $Ax = b$, jeżeli $w_A = w_1 = w_2 = 0$? Odpowiedź uzasadnij; podaj stosowne przykłady.

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2xz + 5y^2 + 2yz + 3z^2,$$

następnie wyznacz liczbę rozwiązań równania $\varphi(x, y, z) = a$ w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.