Zestaw 0.
Rachunek różniczkowy i całkowy

Podstawowe wzory rachunku różniczkowego:

a) $\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$;	b) $f\left(g(x)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$;
c) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$;	d) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$;
e) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$;	f) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;
g) $\left(\sin x\right)' = \cos x$;	h) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;
i) $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;	j) $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
k) $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$;	l) $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
m) $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	n) $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Podstawowe wzory rachunku całkowego:

a) $\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$ – *całkowanie przez części;*

b) $\int f\left(g(x)\right)g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt_{|t=g(x)}$ – *całkowanie przez podstawienie*

oraz

c) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ \mathit{dla}\ n \neq -1$;	d) $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$;
e) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;	f) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
g) $\int f'(x)\sin f(x)\,dx = -\cos f(x) + C$;	h) $\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin f(x) + C$;
i) $\int f'(x)\ln f(x)\,dx = f(x)\left(\ln f(x) - 1\right) + C$;	j) $\int f'(x)\,e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C$;
k) $\int f'(x)\,f^n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}f^{n+1}(x) + C,\ \mathit{dla}\ n \neq -1$;	l) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\left\|f(x)\right\| + C$;
m) $\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \operatorname{arctg} f(x) + C$;	n) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin f(x) + C$;
o) $\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc}\ln\left\|\frac{ax+b}{cx+d}\right\| + C$;	p) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \underset{\triangle<0}{=} \frac{2}{\sqrt{-\triangle}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\triangle}} + C$;
q) $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left\|x+\sqrt{x^2+a^2}\right\|\right) + C$;	r) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$;
s) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|\right) + C$;	t) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(a+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$;
u) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C$;	w) $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left\|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right\| + C$;

Zadanie 1. Znaleźć pochodne następujących funkcji:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2\sqrt{x^4\sqrt{x^3}}}$ b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 - 2x^6$ c) $f(x) = \frac{4}{x^3}$

d) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ e) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - x^3 + \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ f) $f(t) = \frac{\ln x}{t}$

g) $f(x) = \frac{2}{x^3\sqrt{x}}$ h) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$ i) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 4\right)^4$

j) $f(x) = \frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$ k) $f(x) = \frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ l) $f(x) = \frac{3}{3x-2}$

m) $f(x) = a\sin\frac{a}{x}$ o) $f(x) = \operatorname{arcctg}\sin x$ p) $f(x) = \cos\sqrt{x}$

r) $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$ s) $f(x) = \arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$ t) $f(x) = e^{3x}$

u) $f(x) = 5e^{\cos 3x}$ w) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ y) $f(x) = xe^x$

a1) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ b1) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$ c1) $f(x) = \sqrt[x]{x}$

d1) $f(x) = \log_x a$ e1) $f(x) = \log_x \ln x$ f1) $f(x) = \frac{5}{\sin^3 2x}$.

Zadanie 2. Wyznaczyć całki podanych funkcji:

a) $\int \frac{\left(x^2-1\right)^3}{x}dx$ b) $\int \left(2 + \sqrt[3]{x}\right)^3 dx$ c) $\int \frac{x-2\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{16x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx$

d) $\int \frac{e^{4x}-1}{e^x-1}dx$ e) $\int \frac{\sqrt{u^3}+1}{\sqrt{u}+1}du$ f) $\int \left(e^{-x}+1\right)^3 dx$

g) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$ h) $\int \frac{dx}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2 x)}$ i) $\int \frac{dx}{(x-2)(2x+1)}$

j) $\int \frac{4x-1}{x^2-x-2}dx$ k) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$ l) $\int \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$

m) $\int (x+1)\, e^{x^2+2x}dx$ n) $\int \frac{xdx}{\sqrt{-x^2-2x}}$ o) $\int \operatorname{arctg} xdx$

p) $\int \ln xdx$ r) $\int \log_2(x+1)\, dx$ s) $\int \frac{\ln^3 x}{x^2}dx$

t) $\int x^2\ln(x+1)\, dx$ u) $\int \sin^7 xdx$ w) $\int \sin x\cos 3xdx$

oraz sprawdzić poprawność odpowiedzi przez różniczkowanie.

Zestaw 1.
Równania o zmiennych rozdzielonych

Zadanie 1. Rozwiązać podane równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

a) $y' = 2y\,(t+1)\,;$

b) $1 = (1+t+y+ty)\,y';$

c) $y' = \sqrt{1-y^2};$

d) $y' = \frac{1-t}{y+1};$

e) $(1+e^y)\,yy' = e^t;$

f) $y'\sin t = y\ln y;$

g) $(ye^y+1)\,y' = 2t;$

h) $y' + 4y = y\,(e^{-t}+4)\,;$

i) $y' = \frac{\sin y}{\sin t};$

j) $y' + y^2\sin t = 3\,(ty)^2\,;$

k) $y' = -e^{y+t+1};$

l) $\frac{dy}{dt} = e^{y-t}.$

Zadanie 2. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $y'\sin t = y\ln y,\ y(\frac{\pi}{2}) = e;$

b) $t\,(y+1)\,y' = y,\ y\,(e) = 1;$

c) $y' = y^2\,(1+t^2)\,,\ y\,(0) = -2;$

d) $e^y\,(y'-1) = 1,\ y\,(0) = 0;$

e) $t\sqrt{1-y^2}dt + y\sqrt{1-t^2}dy = 0,\ y\,(0) = 1;$

f) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy,\ y\,(0) = e^2;$

g) $(x^2-1)\,y' + 2xy^2 = 0,\ y\,(0) = 1;$

h) $y'\operatorname{ctg} x + y = 2,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4.$

Zestaw 2.
Równania różniczkowe jednorodne

Zadanie 1. Rozwiązać podane równania różniczkowe jednorodne:

a) $yt' = t + y$; b) $y' = \frac{y}{t} + \frac{t}{y}$;

c) $y^2 dt + t^2 dy = tydy$; d) $ty' = 3y - 2t - 2\sqrt{ty - t^2}$;

e) $t^2 y' = ty - y^2$; f) $\left((ty)^2 - t^4\right) y' = (ty)^2 - y^4$;

g) $tyy' = y^2 - t^2$; h) $y' = \frac{t^2 - y^2}{t^2 + y^2}$;

i) $t^2 dy = (y^2 - ty + t^2)\, dt$; j) $t\frac{dy}{dt} = y\left(\ln y - \ln t\right)$;

k) $ty' = y \operatorname{tg} \frac{y}{t}$; l) $\frac{dt}{dy} = e^{\frac{y-t}{t}}$.

Zadanie 2. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $(t - y)\, dt + tdy = 0$, $y(-1) = 0$;

b) $ty' = y + te^{\frac{y}{t}}$, $y\,(1) = 0$;

c) $ty' = y - \sqrt{t^2 + y^2}$, $y\,(1) = 0$;

d) $x' = \frac{x}{t+x}$, $x\,(1) = 1$;

e) $x' = \frac{tx - x^2}{t^2}$, $x\,(1) = 0$;

f) $(t^2 + tx + 3x^2\ )dt + (t^2\ \ + 2tx)dx = 0$, $x\,(1) = 1$.

Zestaw 3.
Równania różniczkowe zupełne

Zadanie 1. Rozwiązać podane równania różniczkowe metodą różniczki zupełnej:

a) $(x-y)\,dx + (2y-x)\,dy = 0$; b) $(3x^2-2y)\,dx + (3y^2-2x)\,dy = 0$;

c) $3x^2 + y^2 + 2y\,(x-1)\,\frac{dy}{dx} = 0$; d) $e^y - (2y - xe^y)\,y' = 0$;

e) $e^x\,(1+e^y) + e^y\,(1+e^x)\,\frac{dy}{dx} = 0$; f) $\frac{1}{y} + x = \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx}$;

g) $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 0$; h) $xdx + ydy + \frac{ydx-xdy}{x^2+y^2} = 0$;

i) $(\ln y - 2x)\,dx + \frac{x-2y^2}{y}dy = 0$; j) $1 + e^{x/y} + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = 0$.

Zadanie 2. Rozwiązać podane równania różniczkowe zupełne metodą czynnika całkującego:

a) $(1-x^2y) + x^2\,(y-x)\,\frac{dy}{dx} = 0$; b) $x^2 + y = xy'$;

c) $(e^{2x} - y^2)\,dx - xdy = 0$; d) $x\sin y + y + (x^2\cos y + x\ln x)\,\frac{dy}{dx} = 0$;

e) $\sin x + e^y + \cos x\frac{dy}{dx} = 0$; f) $y^2 + (xy-1)\,\frac{dy}{dx} = 0$;

g) $(1 + 3x^2\sin y)\,dx = x\,\mathrm{ctg}\,ydy$; h) $2x\,\mathrm{tg}\,y + (x^2 - 2\sin y)\,\frac{dy}{dx} = 0$.

Zestaw 4.
Równania różniczkowe liniowe

Zadanie 1. Wyznaczyć całki podanych równań różniczkowych liniowych:

a) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$;

b) $xy' - 2y = 2x^4$;

c) $(xy + e^x)\, dx - xdy = 0$;

d) $2x\,(x^2 + y)\, dx = dy$;

e) $(x + y^2)\, dy = ydx$;

f) $(2x + y)\, dy = ydx + 4 \ln ydy$;

g) $ty' + t^2 + ty = y$;

h) $y' \cos t - y \sin t = 1$;

i) $y' + \frac{2y}{t} = \frac{\cos t}{t^2}$;

j) $y' = t + 2y + ty + 2$;

k) $(t^2 + 4)\, y' + 3ty = 1$;

l) $y' + y \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}$.

Zadanie 2. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $y' = 2y + e^t - t$, $y(0) = 1/4$;

b) $ty' + 2y = \cos t$, $y\,(\pi/2) = 0$;

c) $ty' + y = t\sqrt{t}$, $y\,(1) = 2$;

d) $x' = 2tx + 3t^2 e^{t^2}$, $x\,(0) = 1$;

e) $ty' = -y + te^{t^2}$, $y\,(1) = 2$;

f) $y' = 2y + e^t - 2 \sin t \cos t$, $x\,(0) = 1$.

Zestaw 5.
Równania różniczkowe Bernoulliego

Zadanie 1. Wyznaczyć całki podanych równań różniczkowych Bernoulliego:

a) $y' + y = y^2$;

b) $y' - \frac{y}{t} = -2\frac{t}{y}$;

c) $\left(1+t^2\right) y' - 2ty = 4\sqrt{y\left(1+t^2\right)}\,\mathrm{arctg}\, t$;

d) $dy = \left(y^2 e^t - y\right) dt$;

e) $t^3 y' - 2ty = y^3$;

f) $2ty' = \left(t + 1 - 6y^2\right) y$;

g) $y' + \frac{8y}{t} = -2y^2$;

h) $z' = z\left(2x-2\right) - z^2$;

i) $y' = y^2$;

j) $y' = -4y - y^2$;

k) $t\left(x' + x^2\right) = x$;

l) $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{t} = -tx^2$.

Zadanie 2. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $t\left(x' + x^2\right) = x,\ x(1) = 1$;

b) $y' + y = y^2,\ y\left(1\right) = 1$;

c) $y' - y\cos t = y^2 \cos t,\ y\left(0\right) = 1$;

d) $ty^2 y' + y^3 = 1,\ y\left(1\right) = 2$;

e) $y' + 4t^3 y^3 + 2ty = 0,\ y\left(0\right) = 1$;

f) $\left(y'\right)^2 - \left(ty^2 + y\right)^2 = 0,\ y\left(-1\right) = 0$.

Zestaw 6.
Równania różniczkowe Riccatiego

Zadanie 1. Wyznaczyć całki podanych równań różniczkowych Riccatiego:

a) $y' = y^2 - (4t+1)\,y + 4t^2 + 2t + 2$;

b) $x' = 2t^2 + \frac{x}{t} - 2x^2$;

c) $x' = -\frac{4}{t^2} - \frac{x}{t} + x^2$;

d) $y' = -y^2 + \frac{2}{x^2}$;

e) $t^2 x' + (tx - 2)^2 = 0$;

f) $y' + 2ye^t - y^2 = e^{2t} + e^t$;

g) $y' + y^2 - 1 = t^2$;

h) $x' - 2tx + x^2 = 5 - t^2$;

i) $x' = -x^2 + 1 + t^2$;

j) $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$;

k) $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$;

l) $y' - 2ty + y^2 = 5 - t^2$.

Zadanie 2. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $xy' - (2x+1)\,y + y^2 = -x^2$, $y(1) = 2$;

b) $y' + 2y^2 = \frac{6}{t^2}$, $y\,(1) = 0$;

c) $y' + y^2 = x^2 - 2x$, $y\,(2) = 1$.

Zestaw 7.
Równania różniczkowe liniowe rzędu n o stałych współczynnikach

Zadanie 1. Wyznaczyć całki podanych równań różniczkowych liniowych:

a) $y'' - 5y' + 4y = 2e^x$;

b) $y^V - 2y''' + y' = 0$;

c) $y'' - 4y' + 4y = x^2$;

d) $y'' + 2y' + 5y = e^x$;

e) $y'' + 2y' + y = 8e^x + x$;

f) $y'' + y = \cos x + 2e^{2x}$;

g) $y' - 2y = 2e^t$;

h) $y'' + 4y' = 0$;

i) $y'' + y = 0$;

j) $y'' - 4y' + 13y = 0$;

k) $y'' + y' - 2y = \operatorname{tg} t$;

l) $y'' - y' = \frac{e^t}{1+e^t}$.

Zadanie 2. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = 16$;

b) $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$;

c) $4y'' - \ y = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$;

d) $2y'' = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;

e) $y'' + 100y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 10$;

f) $y'' + 3y' + 2y = \sin e^t$, $y(0) = -\sin 1$, $y'(0) = -\cos 1$.

Zestaw 8.
Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

Zadanie 1. Rozwiązać podane układy równań:

a) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dot{x} = x + z - y \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dot{x} = x - z - y \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$; f) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$;

g) $x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} x$; h) $x' = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x$;

i) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Zadanie 2. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $x' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $x' = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x$, $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \\ z(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ e^2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$, $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Zestaw 9.
Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

Zadanie 1. Rozwiązać podane układy równań:

a) $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases}$; b) $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t-1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t-1} \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + t \\ \dot{y} = -3x - y + e^t \end{cases}$; d) $\begin{cases} \dot{x} = y + t \\ \dot{y} = 8x - t \end{cases}$;

e) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \sin 3t \\ \dot{y} = -8x - 2y \end{cases}$; f) $x' = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix}$;

g) $x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4t \\ 1 \end{pmatrix}$; h) $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$;

i) $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + te^t \\ \dot{y} = te^t \end{cases}$; j) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ t+1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 2. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$;

b) $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$, $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \sin 3t \\ \dot{y} = -8x - 2y \end{cases}$, $\begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = -1 \end{cases}$

Zadanie 3. Dla podanych macierzy wyznaczyć e^A:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Zestaw 10.
Asymptotyczna stabilność rozwiązań

Zadanie 1. Zbadać lokalną asymptotyczną stabilność rozwiązań zerowych równań różniczkowych z *Zestawu 5.*

Zadanie 2. Zbadać lokalną asymptotyczną stabilność rozwiązań zerowych układów równań różniczkowych z *Zestawu 6.*

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie wartości parametrów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dla których rozwiązania zerowe podanych układów są lokalnie asymptotycznie stabilne:

$$\text{a)} \begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y \\ \dot{y} = \beta x - y + \alpha z \\ \dot{z} = \beta y - z \end{cases} ; \quad \text{b)} \begin{cases} \dot{x} = -\alpha x + y \\ \dot{y} = \alpha\beta^2 x - \beta^2 y - \alpha z \\ \dot{z} = \beta^2 z \end{cases} ; \quad \text{c)} \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = \alpha y + x \\ \dot{z} = y + \beta z \end{cases} .$$

Zadanie 4. Wyznaczyć wszystkie wartości parametrów $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dla których rozwiązania zerowe podanych równań różniczkowych są lokalnie asymptotycznie stabilne:

a) $x''' + 2\alpha x'' + \alpha x' + \beta x = 0;$

b) $x^{IV} + 2x''' + \alpha x'' + \beta x' + x = 0;$

c) $x^{IV} + \alpha x''' + 4x'' + 2x' + \beta x = 0;$

d) $x^{IV} + \alpha x''' + 4x'' + \beta x' + x = 0;$

e) $x^{IV} + x''' + \alpha x'' + x' + x = 0;$

f) $x^{IV} + x''' + \alpha x'' + 2x' + \beta x = 0.$

Zestaw 11.
Transformata Laplace'a

Zadanie 1. Stosując metodę transformaty Laplace'a rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

a) $x'' - x' = \sin t$; $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

b) $\frac{dx}{dt} - 3x = e^{2t}$; $x(0) = 1$;

c) $x'' + x = t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

d) $x' + x = e^{t}$; $x(0) = 1/2$;

e) $x'' + x = t$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

f) $x'' + 4x' + 13x = te^{-t}$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$;

g) $\left\{ \begin{array}{r} 2x' + y' - 2x = 1 \\ x' + y' - 3x - 3y = 2 \end{array} \right.$; $\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$;

h) $\left\{ \begin{array}{l} x' = -y \\ y' = -x \end{array} \right.$; $\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 2 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$;

i) $\left\{ \begin{array}{l} x' = -x + y + e^{t} \\ y' = x - y + e^{t} \end{array} \right.$; $\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$;

j) $\left\{ \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = z \end{array} \right.$; $\left\{ \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{array} \right.$.