Zestaw 0.
Rachunek różniczkowy i całkowy

Podstawowe wzory rachunku różniczkowego:

a) $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)\,;$	b) $f(g(x))' = f'(g(x))\,g'(x)\,;$
c) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)};$	d) $(x^n)' = nx^{n-1};$
e) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a};$	f) $(a^x)' = a^x \ln a;$
g) $(\sin x)' = \cos x;$	h) $(\cos x)' = -\sin x;$
i) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	j) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
k) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$	l) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$
m) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	n) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Podstawowe wzory rachunku całkowego:

a) $\int f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f(x)\,g'(x)\,dx$ – *całkowanie przez części;*

b) $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt_{|t=g(x)}$ – *całkowanie przez podstawienie*

oraz

c) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1},\ dla\ n \neq -1;$	d) $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C;$
e) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$	f) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
g) $\int f'(x)\sin f(x)\,dx = -\cos f(x) + C;$	h) $\int f'(x)\cos f(x)\,dx = \sin f(x) + C;$
i) $\int f'(x)\ln f(x)\,dx = f(x)(\ln f(x) - 1) + C;$	j) $\int f'(x)\,e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C;$
k) $\int f'(x)\,f^n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}f^{n+1}(x) + C,\ dla\ n \neq -1;$	l) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C;$
m) $\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \operatorname{arctg} f(x) + C;$	n) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin f(x) + C;$
o) $\int \frac{dx}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{1}{ad-bc}\ln\left\lvert\frac{ax+b}{cx+d}\right\rvert + C;$	p) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \underset{\triangle<0}{=} \frac{2}{\sqrt{-\triangle}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{-\triangle}} + C;$
q) $\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert\right) + C;$	r) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C;$
s) $\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert\right) + C;$	t) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(a+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C;$
u) $\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C;$	w) $\int \frac{dx}{\sin ax} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right\rvert + C;$

Zadanie 1. Znaleźć pochodne następujących funkcji:

a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^4\sqrt{x^3}}}$	b) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4-2x^6$	c) $f(x)=\frac{4}{x^3}$
d) $f(x)=\sqrt[5]{x^2}$	e) $f(x)=3\sqrt[3]{x}-x^3+\frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$	f) $f(t)=\frac{\ln x}{t}$
g) $f(x)=\frac{2}{x^3\sqrt{x}}$	h) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}}$	i) $f(x)=\left(\frac{1}{x}+4\right)^4$
j) $f(x)=\frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$	k) $f(x)=\frac{a-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	l) $f(x)=\frac{3}{3x-2}$
m) $f(x)=a\sin\frac{a}{x}$	o) $f(x)=\operatorname{arcctg}\sin x$	p) $f(x)=\cos\sqrt{x}$
r) $f(x)=\operatorname{arctg}3x$	s) $f(x)=\arcsin 2x\sqrt{1-x^2}$	t) $f(x)=e^{3x}$
u) $f(x)=5e^{\cos 3x}$	w) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	y) $f(x)=xe^x$
a1) $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$	b1) $f(x)=(\operatorname{arctg}x)^x$	c1) $f(x)=\sqrt[x]{x}$
d1) $f(x)=\log_x a$	e1) $f(x)=\log_x \ln x$	f1) $f(x)=\frac{5}{\sin^3 2x}$.

Zadanie 2. Wyznaczyć całki podanych funkcji:

a) $\int\frac{\left(x^2-1\right)^3}{x}dx$	b) $\int\left(2+\sqrt[3]{x}\right)^3dx$	c) $\int\frac{x-2\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{16x^3}}{6\sqrt[3]{x}}dx$
d) $\int\frac{e^{4x}-1}{e^x-1}dx$	e) $\int\frac{\sqrt{u^3}+1}{\sqrt{u}+1}du$	f) $\int\left(e^{-x}+1\right)^3dx$
g) $\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$	h) $\int\frac{dx}{(1+x^2)(1+\operatorname{arctg}^2x)}$	i) $\int\frac{dx}{(x-2)(2x+1)}$
j) $\int\frac{4x-1}{x^2-x-2}dx$	k) $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$	l) $\int\frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$
m) $\int(x+1)\,e^{x^2+2x}dx$	n) $\int\frac{xdx}{\sqrt{-x^2-2x}}$	o) $\int\operatorname{arctg}xdx$
p) $\int\ln xdx$	r) $\int\log_2(x+1)\,dx$	s) $\int\frac{\ln^3x}{x^2}dx$
t) $\int x^2\ln(x+1)\,dx$	u) $\int\sin^7xdx$	w) $\int\sin x\cos 3xdx$

oraz sprawdzić poprawność odpowiedzi przez różniczkowanie.