

Zestaw 9.

Układy równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

Zadanie 1. Rozwiązać podane układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \frac{2}{e^t-1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \frac{3}{e^t-1} \end{cases} ;$$

$$\text{c) } \begin{cases} \dot{x} = x - y + t \\ \dot{y} = -3x - y + e^t \end{cases} ; \quad \text{d) } \begin{cases} \dot{x} = y + t \\ \dot{y} = 8x - t \end{cases} ;$$

$$\text{e) } \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \sin 3t \\ \dot{y} = -8x - 2y \end{cases} ; \quad \text{f) } x' = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ 1 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{g) } x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4t \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \text{h) } x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} ;$$

$$\text{i) } \begin{cases} \dot{x} = -x - y + te^t \\ \dot{y} = te^t \end{cases} ; \quad \text{j) } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ t+1 \end{pmatrix} .$$

Zadanie 2. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe:

$$\text{a) } x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{b) } x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}, x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} ;$$

$$\text{c) } \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \sin 3t \\ \dot{y} = -8x - 2y \end{cases}, \begin{cases} x(1) = 1 \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Zadanie 3. Dla podanych macierzy wyznaczyć e^A :

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} .$$