

## Zestaw 1. Granica i ciągłość funkcji wielu zmiennych

1. Przedstaw graficznie dziedziny (naturalne) podanych funkcji:

$$(a) f(x, y) = \frac{1}{(x-2)(y+1)}, \quad (b) f(x, y) = \log_{x^2+y^2} (4 - x^2 - y^2), \quad (c) f(x, y) = \sqrt{\ln \cos(x-y)}.$$

2. Jakie powierzchnie w układzie  $O_{xyz}$  opisane są poniższymi zależnościami?

$$(a) y = x^2 - 2x + 3, \quad (b) x^2 + y^2 = 1, \quad (c) 2x + y - z + 1 = 0, \quad (d) z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$(e) z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, \quad (f) z = 4x^2 + y^2, \quad (h) z = 1 - 3x^2 - 3y^2, \quad (i) x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

3. Dla podanych funkcji wyznacz granice iterowane w punkcie  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ :

$$(a) f(x, y) = \frac{|x| - |y| + x^2 + y^2}{|x| + |y|}, \quad (b) f(x, y) = \frac{x \sin \frac{1}{x} + y}{x + y}, \quad (c) f(x, y) = x \operatorname{tg} \frac{1}{y},$$

$$(d) f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin^2 \frac{1}{x}, \quad (e) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (f) f(x, y) = \frac{\sin(|x| + |y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Co na podstawie wyznaczonych granic iterowanych możemy powiedzieć o granicy podwójnej?

4. Wyznacz (lub uzasadnij, że nie istnieją) poniższe granice:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{xy^2} \quad (e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{|x| + |y|} \quad (f) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^y + y)^{1/y}$$

$$(h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} \quad (i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x|^y \quad (j) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2 - 1}{(y - 2)^2}$$

$$(k) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} \frac{\sin(x \sin y)}{xy} \quad (l) \lim_{(x,y) \rightarrow (1, \frac{\pi}{2})} \frac{\cos xy}{(y - \frac{\pi}{2})^2} \quad (m) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

5. Zbadaj ciągłość podanych funkcji:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y + x|y|}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin(xy)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{e^{x^2 + y^2} - 1} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin|x+y|}{|x|+|y|} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (f) \text{☠} f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^4 + y^2} & \text{dla } x > 0 \\ x \cos x + y & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

6. ☠ Wyznacz, o ile istnieją, te wartości parametrów  $a, b \in \mathbb{R}$ , dla których podane funkcje są ciągłe:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+ay)(x+by)}{x^2 - y^2} & \text{dla } |x| \neq |y| \\ x^2 & \text{dla } |x| = |y| \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - 1 & \text{dla } x^2 + y^2 \geq 1 \\ ax + by & \text{dla } x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

## Zestaw 2. Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

1. Wyznacz pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach oraz kierunkach:

(a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(x_0, y_0) = (1, -1)$ ,  $\vec{v} = (-3, -4)$ ;

(b)  $f(x, y) = x \ln y + y \ln x$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 0)$ ;

(c)  $f(x, y) = |x - y|$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ,  $\vec{v} = (3, 4)$ ;

(d)  $f(x, y) = 2|x| + |y|$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,  $\vec{v} = (1, 1)$ .

2. Przypuśćmy, że funkcja  $f$  posiada pochodną kierunkową  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0)$  w punkcie  $p_0$  w kierunku wektora  $\vec{v} \neq 0$ . Uzasadnij, że

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p_0 + t\vec{v}) - f(p_0)}{t\|\vec{v}\|} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0).$$

Wykorzystując wykazaną zależność wyznacz ponownie pochodną kierunkową wybranej funkcji z poprzedniego zadania.

3. Zachodzi następujące twierdzenie:

**Twierdzenie** Jeżeli funkcja  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ma ciągle wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w otoczeniu pewnego punktu  $p_0 \in \mathbb{R}^n$ , to dla dowolnego wektora  $\vec{v}$  mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(p_0) = \vec{v} \circ \text{grad } f(p_0),$$

gdzie  $\text{grad } f(p_0) = (f'_{x_1}(p_0), \dots, f'_{x_n}(p_0))$  to gradient funkcji  $f$  w punkcie  $p_0$ , a  $\circ$  to naturalny iloczyn skalarny w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ .

Wykorzystując powyższy fakt, wyznacz ponownie pochodne kierunkowe z zadania 1.

4. Wyznacz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji  $f$ :

(a)  $f(x, y) = \frac{\sin x + \cos y}{\sin x - \cos y} + x^{y^2+2y}$ ,

(b)  $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$ ,

(c)  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ ,

(d)  $f(x, y) = xy \operatorname{sgn}(xy)$ ,

(e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ , (f)  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } xy = 0 \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases}$ .

5. (a) Niech  $g(x, y) = f(xy, x^2 + y^2)$ , gdzie funkcja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jest klasy  $\mathcal{C}^1$ . Wyznacz

$$y \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

- (b) Wykaż, że funkcja  $g(x, y) = y + f(x^2 + y^2)$  spełnia równanie

$$x \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) - y \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = x;$$

funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  to dowolna funkcja różniczkowalna.

6. Wyznacz macierze Jacobiego oraz różniczki zupełne podanych funkcji we wskazanych punktach:

- (a)  $f(x) = x^2 + x + 1, x_0 = 1;$   
 (b)  $f(x, y) = x^2y + y^2x, (x_0, y_0) = (0, 1);$   
 (c)  $f(x) = (x, x^2 + x, 2x - 1), x_0 = 1;$   
 (d)  $f(x, y, z) = (xy + yz, x^2 + y^2), (x_0, y_0, z_0) = (-1, 2, 1).$

7. Zbadaj różniczkowalność podanych funkcji:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{(b)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{(c)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{(d)} \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

8. Sprawdź, czy poniższe funkcje spełniają warunek  $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$ :

$$\text{(a)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{(b)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

9. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji  $f(x, y) = \arctg(y/x)$  w punkcie  $(1, 1)$ .

---

**Zestaw 3. Ekstrema lokalne, warunkowe, globalne**


---

1. Wyznacz ekstrema lokalne podanych funkcji:

- (a)  $f(x, y) = 3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$ ;
- (b)  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$ ;
- (c)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ;
- (d)  $f(x, y) = x^3 - y^3 + 1$ ;
- (e)  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$ ;
- (f)  $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$ ;
- (g)  $f(x, y, z) = 2x^2/y + y^2/z - 4x + 2z^2$ ;
- (h)  $f(x, y, z) = x + y + z + 16/xyz$ .

2. Wyznacz ekstrema warunkowe podanych funkcji przy zadanych warunkach:

- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2$ ,  $2x^2 + y^2 = 4$ ;
- (b)  $f(x, y) = x + y$ ,  $e^{x+y} - xy - 1 = 0$ ;
- (c)  $f(x, y) = y - \ln x$ ,  $x^2 + (y - 2)^2 - 2 = 0$ ;
- (d)  $f(x, y) = x + 2y$ ,  $x^2 + y^2 = 5$ ;
- (e)  $f(x, y, z) = x + y + 2z$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ;
- (f)  $f(x, y, z) = xyz$ ,  $x + y + z = 1$ ;
- (g)  $f(x, y, z) = x + y + z$ ,  $xyz = 1$ ;
- (h)  $f(x_1, \dots, x_n) = 2 \ln |x_1 \cdot \dots \cdot x_n|$ ,  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ ;
- (i)  $f(x_1, \dots, x_n) = 2(x_1^4 + \dots + x_n^4)$ ,  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ .

3. Wyznacz największą oraz najmniejszą wartość funkcji  $f$  w podanym obszarze:

- (a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $|x| + |y| \leq 2$ ;
- (b)  $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$  w trójkącie ograniczonym osiami  $O_x$ ,  $O_y$  oraz prostą  $x + y = 2\pi$ ;
- (c)  $f(x, y) = xy$ ,  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ ;
- (d)  $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$  w trójkącie domkniętym o wierzchołkach  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 1)$ ;
- (e)  $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ;
- (f)  $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$ ,  $0 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$ .

4. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi : \mathbb{R}^2 \ni x \rightarrow x^T A x \in \mathbb{R}.$$

Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji  $\varphi$  w zbiorze  $\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ . Porównaj otrzymane wyniki z wartościami własnymi macierzy  $A$ .

5. Spośród wszystkich trójkątów wpisanych w okrąg o promieniu  $r$  wybierz ten o największym polu.

6. Oblicz odległość punktu  $A = (0, 1, 0)$  od powierzchni o równaniu  $y = xz$ .

7. Oblicz odległość początku układu współrzędnych od:

(a) płaszczyzny  $\pi : x - 2y + 3z - 6 = 0$ ;      (b) powierzchni  $\gamma : z = \sqrt{(x+2)(y-1)}$ .

8. Wyznacz te wartości parametrów  $a \in [-3, 3]$ ,  $b \in [-1, 1]$  dla których wykres funkcji

$$f : [-1, 1] \ni x \rightarrow 5x^3 - ax - b \in \mathbb{R}$$

obrócony wokół osi  $O_x$  ogranicza bryłę o najmniejszej objętości.