I. LICZBY ZESPOLONE

1. Obliczyć:

a) $\frac{(3-\mathrm{i})(1-4\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}$,

b) $(3+\mathrm{i})^3-(3-\mathrm{i})^3$,

c) $(1+\mathrm{i})^{4n}, \quad n \in \mathbf{N}$,

d) $(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2})^{24}$,

e) $(2-\sqrt{3}+\mathrm{i})^{12}$,

f) $\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{30}$,

g) $\frac{(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{15}}{(1+\mathrm{i})^{20}}$,

h) $\frac{(\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2})^{18}}{(-\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2})^{19}}$.

2. Rozwiązać równania:

a) $z^2=5-12\mathrm{i}$,

b) $z^2-5z+4+10\mathrm{i}=0$,

c) $|z|+z=8+4\mathrm{i}$,

d) $(z+2)^2=(\bar{z}+2)^2$,

e) $z^4+3z^2-4=0$,

f) $z^6-(1+\mathrm{i})z^3-2+2\mathrm{i}=0$.

3. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby:

a) $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$,

b) $2+\sqrt{3}+\mathrm{i}$,

c) $\frac{1+\mathrm{i}\operatorname{tg}\phi}{1-\mathrm{i}\operatorname{tg}\phi}$,

d) $1+\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi, \ \phi \in (-\pi,\pi]$.

4. Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyrazić:

a) $\sin 3x$ przez funkcję $\sin x$,

b) $\cos 5x$ przez funkcję $\cos x$.

5. Obliczyć:

a) $\sqrt[6]{\mathrm{i}}$,

b) $\sqrt[8]{2\sqrt{2}(1-\mathrm{i})}$,

c) $\sqrt[4]{8\mathrm{i}\sqrt{3}-8}$,

d) $\sqrt[3]{1+\mathrm{i}}$,

e) $\sqrt[3]{2-2\mathrm{i}}$,

f) $\sqrt{-11+60\mathrm{i}}$,

g) $\sqrt[4]{-4}$,

h) $\sqrt{(5-4\mathrm{i})^4}$,

i) $\sqrt[4]{(-2+3\mathrm{i})^4}$,

j) $\sqrt[4]{\frac{-18}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}}$.

6. Rozwiązać równania:

a) $(z-1)^6 = (\mathrm{i}-z)^6$,

b) $z^3 = (\mathrm{i}z+1)^3$,

c) $(z+1)^n - (z-1)^n = 0, \quad n \in \mathbf{N}$.

7. Zaznaczyć na płaszczyźnie zbiór punktów odpowiadający liczbom zespolonym spełniającym warunki:

a) $|z-1-\mathrm{i}| < 1$,

b) $1 \le |z-2\mathrm{i}| < 2$,

c) $|\bar{z}-1+3\mathrm{i}| \le 5$,

d) $-1 < \mathrm{Re}(\mathrm{i}z) < 0$,

e) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z+2) \ge 0$,

f) $\mathrm{Im}(z^2) < 0$,

g) $|\mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z| < 1$,

h) $|z-1| + |z+1| = 3$,

i) $|z-2| = |z+2\mathrm{i}|$,

j) $|\arg z| < \frac{\pi}{6}$,

k) $\frac{\pi}{6} \le \arg(z-3) < \frac{\pi}{3}$,

l) $\arg(z^6) = \pi$,

ł) $0 \le \arg((1+\mathrm{i})z) < \frac{3}{4}\pi$,

m) $\sin(\pi|z+2\mathrm{i}|) > 0$.