II. PRZESTRZENIE WEKTOROWE

1. Sprawdzić, czy zbiór W jest podprzestrzenią przestrzeni $(\mathbf{R}^3, +, \mathbf{R}, \cdot)$, gdzie:

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \quad xz = 0\}$,

b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \quad y \neq 0\}$,

c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x = -y\}$,

d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x + y + z = 1\}$,

e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \quad x + y + z = 0\}$.

2. Sprawdzić, czy zbiór W jest podprzestrzenią przestrzeni $(\mathbf{R}^4, +, \mathbf{R}, \cdot)$, gdzie:

a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : \quad x - y = z - t\}$,

b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : \quad 2|x| = 3|y|\}$,

c) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 : \quad x^2 + z^6 = 0\}$.

3. Zbadać liniową niezależność podanych wektorów w odpowiedniej przestrzeni wektorowej:

a) $(1, -2, 3),\ (1, 0, 1),\ (-1, 2, 1)$ w $\mathbf{R}^3$,

b) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ w $\mathbf{R}^n$, gdzie:

$x_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$,

$x_2 = (0, x_{22}, \ldots, x_{2n})$,

$x_3 = (0, 0, x_{33}, \ldots, x_{3n})$,

$\vdots$

$x_n = (0, 0, \ldots, 0, x_{nn}) \quad$ oraz $\quad x_{ii} \neq 0 \quad$ dla $\quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

c) $1 + \mathrm{i},\ 2 - \sqrt{3}\mathrm{i},\ 3 + 2\mathrm{i}$ w $(\mathbf{C}, +, \mathbf{R}, \cdot)$,

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ w $M_{2\times 2}(\mathbf{R})$.

4. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ zbiór wektorów:

a) $\{(1, 1, 1),\ (1, 2, 3),\ (a, 1, 1)\}$,

b) $\{(1, 1, a),\ (2, 1, 4),\ (4, 2, 8)\}$

jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni $\mathbf{R}^3$?

5. Sprawdzić, czy podane wektory generują wskazaną przestrzeń wektorową:

a) $(2,1)$ i $(0,-1)$; $\mathbf{R}^2$,

b) $(-2,1,-3)$, $(1,0,2)$ i $(1,2,1)$; $\mathbf{R}^3$.

6. Wyznaczyć generatory przestrzeni wektorowej V, gdzie:

a) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : \quad 2x - y + 3z - t = 0\}$,

b) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : \quad x - y = y - z = z - t\}$.

7. Dla jakiej wartości parametru $a \in \mathbf{R}$ zbiór B stanowi bazę odpowiedniej przestrzeni wektorowej:

a) $B = \{(a-2,-a),(3,2+a)\}$; $\mathbf{R}^2$,

b) $B = \{(1,3,a),(a,0,-a),(1,2,1)\}$; $\mathbf{R}^3$?

8. Wskazać bazy i określić wymiary następujących przestrzeni wektorowych:

a) $V = \{(x+y+z, x-y, x-z, y-z) : \quad x,y,z \in \mathbf{R}\}$,

b) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 : \quad 2x - z = y - t = 0\}$,

c) $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbf{R}^5 : \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0,$
$x_2+x_3+x_4 = 0,\ x_3+x_4+x_5 = 0,\ x_4+x_5+x_1 = 0,\ x_5+x_1+x_2 = 0\}$,

d) $V = \{[a_{ij}] \in M_{2\times 2} : \quad a_{11} + a_{22} = 0\}$.

9. Niech V będzie podprzestrzenią przestrzeni $\mathbf{R}^4$ generowaną przez wektory $(2,1,3,1),(1,2,0,1),(-1,1,-3,0)$.

a) Wyznaczyć bazę B i wymiar tej podprzestrzeni.

b) Znaleźć współrzędne wektorów $v = (1,-1,3,0)$ oraz $w = (3,3,3,2)$ w bazie B.

10. Znaleźć bazę przestrzeni $\mathbf{R}^4$, w której wektor $v = (0,-1,2,0)$ ma wszystkie współrzędne równe 1.