

III. MACIERZE

1. Obliczyć:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3,$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^4.$$

2. Rozwiązać równania:

$$\text{a)} 3X \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + 2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

3. Znaleźć wszystkie macierze zespolone X spełniające odpowiednie równanie:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{c)} X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{b)} X - iX^T = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 6 - 2i & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = X \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Obliczyć wyznaczniki:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1+i & 4-i & i \\ 2+i & 4-3i & 3-i \\ i & 2-2i & 1-i \end{vmatrix},$$

$$\text{c)} \begin{vmatrix} 4 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 4 & 4 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\text{b)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix},$$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}.$$

5. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy A , jeśli:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } A = \begin{bmatrix} 1+i & i & 1-i \\ i & i & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Wyznaczyć rzędy macierzy:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 2+i \\ i & -3 & 2+3i \\ 2-i & 4-i & -2i \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

7. Znaleźć rzędy macierzy w zależności od parametru rzeczywistego p :

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & p \\ 3 & p & 3 \\ 2p & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} p-1 & p-1 & 1 & 1 \\ 1 & p^2-1 & 1 & p-1 \\ 1 & p-1 & p-1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & p & 0 \\ 3 & p & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & p \\ 1 & 1 & p & p \\ 1 & p & p & p \end{bmatrix},$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} p & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & p & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{f) } \begin{bmatrix} p & -p & 1 & -p \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & p & 3 & p \\ p & 1 & p & 1 \end{bmatrix}.$$