

V. ODWZOROWANIA LINIOWE

1. Które z podanych odwzorowań są liniowe?

a) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{|x|+1},$

b) $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2),$

c) $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, z + 1),$

d) $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad f(x, y, z) = (y - z, x - z, x - y),$

e) $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad f$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ wokół punktu $(0, 0)$.

2. Dane jest odwzorowanie $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ określone wzorem

$$g(x, y, z) = (2x + y - z, y - x + 3z, x - 2y + 3z).$$

- Wykazać, że g jest odwzorowaniem liniowym.
- Wyznaczyć bazę jądra i bazę obrazu tego odwzorowania.
- Czy g jest monomorfizmem, epimorfizmem lub izomorfizmem?
- Podać rząd odwzorowania g .

3. Dane jest odwzorowanie liniowe $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ określone wzorem

$$g(x, y, z) = ((m - 2)x + 2y - z, 2x + my + 2z, 2mx + 2(m + 1)y + (m + 1)z).$$

- Wyznaczyć rząd odwzorowania g dla różnych wartości parametru m .
- Dla których wartości parametru m odwzorowania g jest izomorfizmem?

4. Wyznaczyć jądra i obrazy wraz z ich bazami następujących odwzorowań liniowych:

a) $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, y + z),$

b) $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4, \quad f(x, y, z) = (2x - y + z, x + 2y - z, -x + 3y - 2z, 8x + y + z).$

Sprawdzić, czy f jest monomorfizmem, epimorfizmem lub izomorfizmem.

5. Znaleźć odwzorowanie liniowe $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, określone następującymi zależnościami:

$$f(1, 1, -1) = (0, 1), \quad f(1, -1, 1) = (2, 0), \quad f(-1, 1, 1) = (3, -1).$$

6. Skonstruować przykładowe odwzorowania liniowe f zakładając, że:

a) $\text{Ker } f = \text{lin}\{(1, 1, 0), (-1, 1, 0)\}, \quad \text{Im } f = \text{lin}\{(2, 1, 1)\},$

b) $\text{Ker } f = \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\}, \quad \text{Im } f = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : 2x = 3y = 6z\}.$