VI. MACIERZ ODWZOROWANIA LINIOWEGO

1. Wyznaczyć macierz odwzorowania liniowego we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni wektorowych:

a) $f = \mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3}$, $\quad B_1 = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$, $\quad B_2 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$,

b) $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\quad f(x,y,z,t) = (x+y, z+t)$,
$B_1 = ((1,0,0,0),(1,2,0,0),(1,2,3,0),(1,2,3,4))$, $\quad B_2 = ((1,0),(1,2))$,

c) $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, $\quad f$ - rzut prostokątny na oś OX,
$B_1 = ((1,2),(2,3))$, $\quad B_2 = ((2,1),(3,2))$.

2. Niech $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ w bazach $B_1 = (v_1, v_2)$, $B_2 = (w_1, w_2, w_3)$. Obliczyć $f(u)$, jeśli $u = 6v_1 - v_2$.

3. Korzystając z twierdzenia o zamianie baz, napisać macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ w zadanej bazie B:

a) f - rzut prostokątny na płaszczyznę OXY, $\quad B = ((1,1,0),(2,3,2),(0,1,3))$,

b) $f(x,y,z) = (z, 2x+y, 0)$, $\quad B = ((1,1,1),(0,0,1),(0,1,1))$.

4. Korzystając z twierdzenia o zamianie baz, napisać macierz odwzorowania liniowego $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $\quad f(x,y,z,t) = (x+y, x+z, x+t)$ w bazach $B_1 = ((1,0,0,-1),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,-1,0))$, $\quad B_2 = ((1,1,0),(0,1,0),(0,1,1))$.

5. Niech $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ w bazach $B_1 = (v_1, v_2)$, $B_2 = (w_1, w_2, w_3)$.
Wyznaczyć macierz tego odwzorowania w bazach $B_1' = (3v_1 + v_2, v_1 - v_2)$, $B_2' = (2w_1 - w_3, 4w_2, w_1 - w_3)$.

6. W przestrzeni $\mathbf{R}^4$ dana jest macierz P przejścia z bazy kanonicznej B_k do bazy B'

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Znaleźć bazę B'.

b) Wyznaczyć macierz przejścia z bazy B' do B_k.

c) Wyznaczyć współrzędne wektora $u = (1, 1, 1, 1)$ w bazie B'.

7. Niech $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 8 & -7 \end{bmatrix}$ będzie macierzą endomorfizmu przestrzeni $\mathbf{R}^2$ w bazie $B = ((1, 1), (-1, 1))$.

a) Znaleźć macierz odwzorowania f w bazie kanonicznej B_k.

b) Wyznaczyć współrzędne wektorów v, $f(v)$ w bazach B i B_k, jeśli $v = (2, -1)$.

8. Wiedząc, że macierz endomorfizmu $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ ma w bazach $B_1 = ((1, 0), (1, 1))$, $B_2 = ((1, 1), (0, -1))$ postać $M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ sprawdzić, czy f jest odwzorowaniem odwracalnym. Jeśli tak, to wyznaczyć f^{-1}.

9. Niech $A = M_f(B_1, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ będzie macierzą odwzorowania liniowego $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ w bazach B_1, B_2, a $C = M_g(B_2, B_3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ macierzą odwzorowania liniowego $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ w bazach B_2, B_3. Znaleźć $M_{gof}(B_3, B_3)$, jeżeli wiadomo, że $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$, $B_2 = (v_1, v_2)$, $B_3 = (w_1, w_2, w_3)$ oraz $w_1 = 2u_2 + u_3$, $w_2 = -u_1$, $w_3 = -u_2 - u_3$.