# VII. WARTOŚCI I WEKTORY WŁASNE

**1.** Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne endomorfizmu $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, gdzie

$$f(x, y, z) = (x + y, 2x + y + 2z, y + z).$$

**2.** Niech $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ będzie bazą kanoniczną przestrzeni $\mathbf{R}^4$ oraz niech $f$ będzie endomorfizmem przestrzeni $\mathbf{R}^4$ spełniającym warunki:

$$\forall i = 1, 2, 3, 4 \quad f(e_i) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4.$$

**a)** Podać macierz endomorfizmu $f$ względem bazy $B$.

**b)** Znaleźć $\mathrm{Im} f$, $\dim \mathrm{Im} f$, $\mathrm{Ker} f$ oraz bazę $\mathrm{Ker} f$.

**c)** Wyznaczyć wartości własne i podprzestrzenie własne endomorfizmu $f$. Czy $f$ jest diagonalizowalny?

**3.** Endomorfizm $f$ przestrzeni $\mathbf{R}^2$ przeprowadza wektory $(1, 1)$, $(1, -1)$ odpowiednio na wektory $(1, 1)$, $(3, -3)$. Obliczyć $f^{2016}(4, 2)$.

**4.** Endomorfizm $f$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$ spełnia warunki:

$$f(0, 1, 1) = (0, 1, 1), \qquad f(2, 2, 0) = (0, 0, 0), \qquad f(-1, 0, 0) = (1, 0, 0).$$

Obliczyć:

**a)** $f^{147}(x, y, z)$ dla $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.

**b)** $f^{147}(1, 3, 5)$.

**5.** Sprawdzić, czy następujące macierze są diagonalizowalne:

**a)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

**b)** $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,

**c)** $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

**6.** Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Wykazać, że $A$ jest diagonalizowalna oraz znaleźć macierze diagonalną $D$ i nieosobliwą $P$ takie, że $D = P^{-1}AP$.

**7.** Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}$, gdzie $a \in \mathbf{R}$.

**a)** Dla jakich wartości parametru $a$ macierz $A$ jest diagonalizowalna? W tym przypadku znaleźć macierz nieosobliwą $P$ taką, by macierz $D = P^{-1}AP$ była diagonalna.

**b)** Wyznaczyć $A^n$ zakładając, że $a = 0$.

**8.** Dana jest macierz $A$ endomorfizm $f$ przestrzeni $\mathbf{C}^4$ nad ciałem $\mathbf{C}$ w bazie kanonicznej:

$$A = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} & 0 & 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

**a)** Wykazać, że macierz $A$ jest diagonalizowalna. Znaleźć bazę $B$, w której macierz $D$ endomorfizm $f$ jest diagonalna. Podać macierz $D$.

**b)** Znaleźć $A^n$.

**9.** Wyznaczyć wartości własne oraz odpowiadające im podprzestrzenie własne macierzy zespolonych. Sprawdzić, czy macierze te są diagonalizowalne.

**a)** $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

**b)** $B = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,

**c)** $C = \begin{bmatrix} \mathrm{i}-1 & 2 & 1 \\ 0 & 2\mathrm{i} & 3 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}-1 \end{bmatrix}$.