Dyfuzja w stanie stacjonarnym

Witold Kucza

Rozwiązania równ. dyfuzji

Rozwiązań równania lub układu równań różniczkowych, w tym równania dyfuzji, jest nieskończenie wiele, spośród nich wybieramy tylko te spełniające zadane **warunki początkowe i brzegowe**.

Warunki początkowe określają stężenia (temperatury, itp.) dla chwili $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$.

Dla układu 1-wymiarowego rozciągającego się od x_0 do x_1 **warunki brzegowe** określają stężenia (temperatury) lub strumienie na brzegu układu dla $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ oraz $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$.

Warunki brzegowe (WB)

WB Dirichleta określają wartość funkcji na brzegu układu

dla $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$ oraz $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1}$

Przykładowo: stężenia lub temperatury są stałe na brzegach

$$c(x = x_0, t) = c_0 \qquad T(x = x_0, t) = T_0$$

lub

$$c(x = x_1, t) = c_1 \qquad T(x = x_1, t) = T_1$$

WB Neumanna określają wartość pochodnej funkcji na brzegu układu

dla $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0}$ oraz $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1}$

Przykładowo: strumienie przez brzegi są zerowe (układ zamknięty)

$$J(x = x_0, t) = 0$$

$$J(x = x_1, t) = 0$$

*W toku tego wykładu skróty **WBD** i **WBN** będą się odnosiły do sformułowanych powyżej warunków brzegowych*

Rozwiązania w stanie stacjonarnym

W stanie stacjonarnym, z definicji, zerują się pochodne czasowe: lewe, a zatem, i prawe strony równań ciągłości

Dla układu trójwymiarowego:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 = -\frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial z}$$

Dla geometrii cylindrycznej:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial (r \cdot J)}{\partial r}$$

Dla układu jednowymiarowego:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

Dla geometrii sferycznej:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 \cdot J)}{\partial r}$$

Geometria planarna (SS)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

x_0 x_1

Dane: c_0 lub J_0 | D_1 | c_1 lub J_1

Szukane: $c(x)$=?

Geometria planarna (SS)

WD na lewym i prawym brzegu

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{dx}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$J(x) = \mathrm{const}$$

$\Downarrow$ z I prawa Ficka, dla D = const

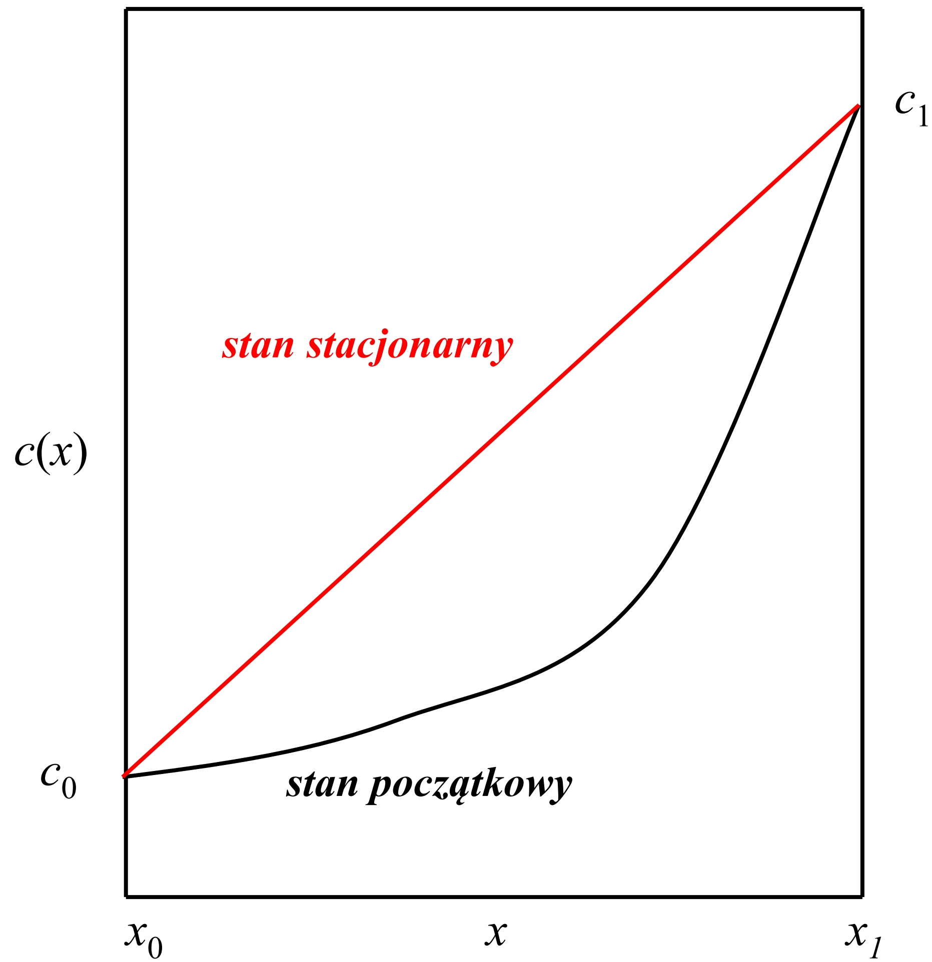
$$c(x) = \mathrm{a} + b \cdot x$$

$\Downarrow$ z warunków brzegowych

$$\boxed{c(x) = \frac{c_0 \cdot x_1 - c_1 \cdot x_0}{x_1 - x_0} + \frac{c_1 - c_0}{x_1 - x_0} x}$$

dyfuzja zachodzi!

$$\boxed{J = -D \frac{c_1 - c_0}{x_1 - x_0}}$$



Geometria planarna (SS)

WN na lewym i prawym brzegu

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{dx}} = 0$$

$\Downarrow$

$$J(x) = \text{const}$$

$\Downarrow$ $J(x = (x_0 \vee x_1)) = 0$

$$J(x) = 0$$

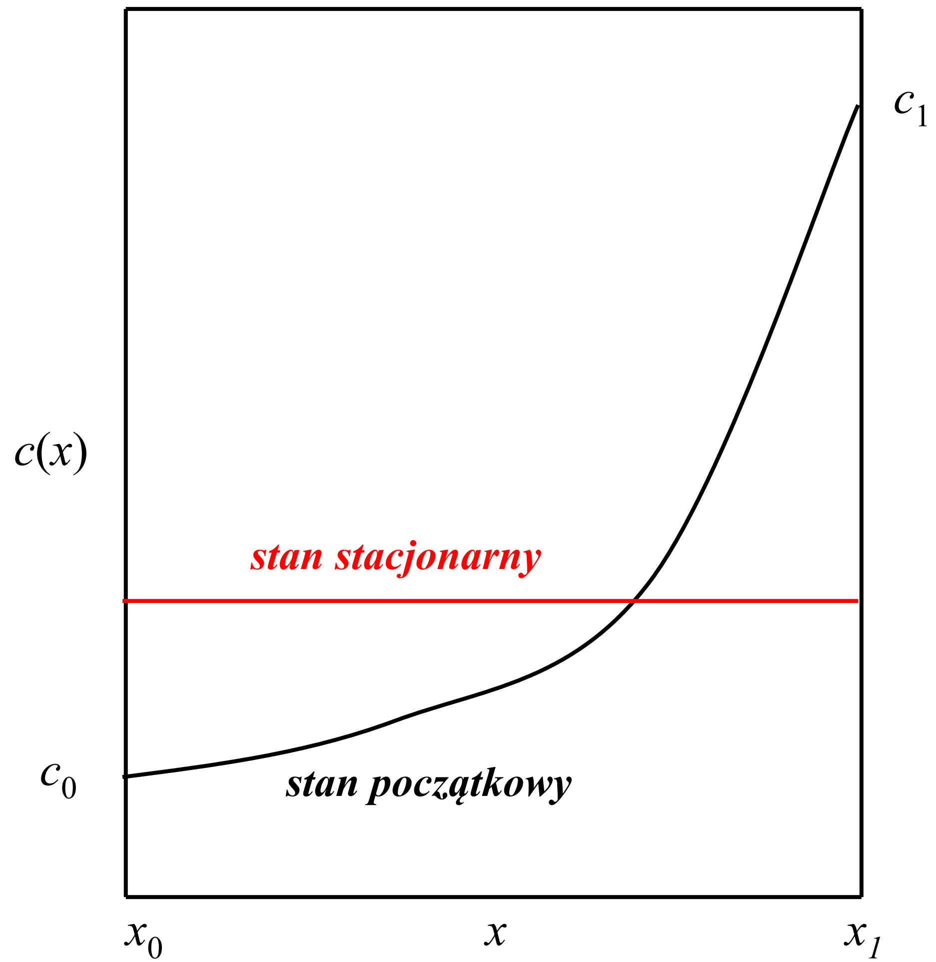
$\Downarrow$ z I prawa Ficka, dla $D > 0$

$$c(x) = \text{const}$$

$\Downarrow$ dla ukł. zamkniętego

$$\boxed{c(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} c(x, t=0)\,dx}$$

dyfuzja nie zachodzi!



Geometria planarna (SS)

WD na lewym i WN na prawym brzegu

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{dx}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$J(x) = \mathrm{const}$$

$$\Downarrow \qquad J(x = x_1) = 0$$

$$J(x) = 0$$

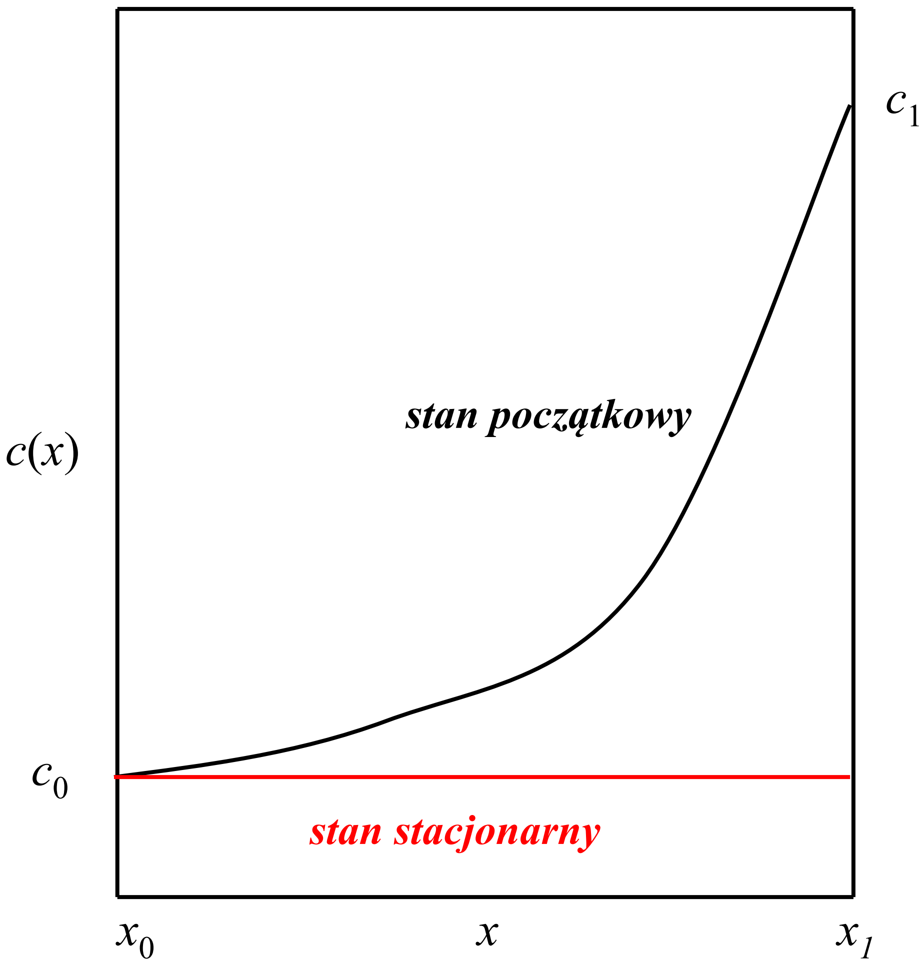
$$\Downarrow \qquad \text{z I prawa Ficka, dla } D > 0$$

$$c(x) = \mathrm{const}$$

$$\Downarrow \qquad c(x = x_0) = c_0$$

$$\boxed{c(x) = c_0}$$

dyfuzja nie zachodzi!



Geometria planarna (SS)

WN na lewym i WD na prawym brzegu

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{dx}} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$J(x) = \mathrm{const}$$

$$\Downarrow \quad J(x = x_0) = 0$$

$$J(x) = 0$$

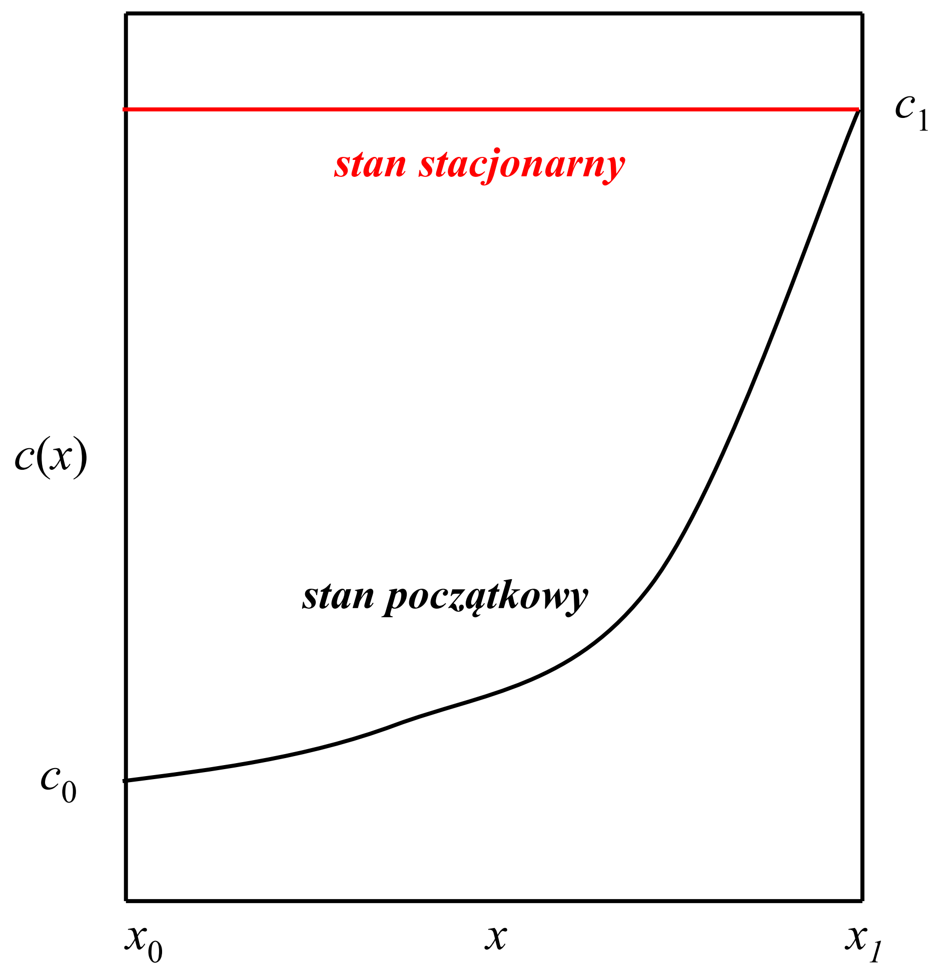
$$\Downarrow$$ z I prawa Ficka, dla $D > 0$

$$c(x) = \mathrm{const}$$

$$\Downarrow \quad c(x = x_1) = c_1$$

$$\boxed{c(x) = c_1}$$

dyfuzja nie zachodzi!



Układy wielowarstwowe

Dla **warunków brzegowych Dirichleta**, strumień w układzie wielowarstwowym jest stały (niezerowy), podobnie jak gęstość prądu w układzie szeregowo połączonych oporników.

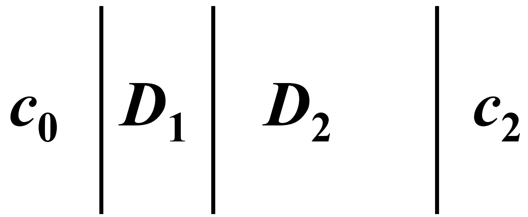
Również **I prawo Ficka** jest analogiczne do **prawa Ohma**

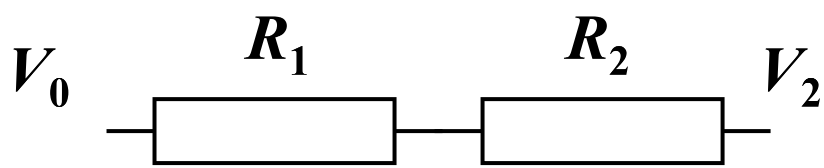
$$\boxed{J = -D\frac{\partial c}{\partial x}}$$

$$\boxed{J = \sigma\frac{\partial V}{\partial x}}$$

J oznacza tutaj strumień ładunku czyli gęstość prądu

Zatem metody postępowania będą analogiczne!

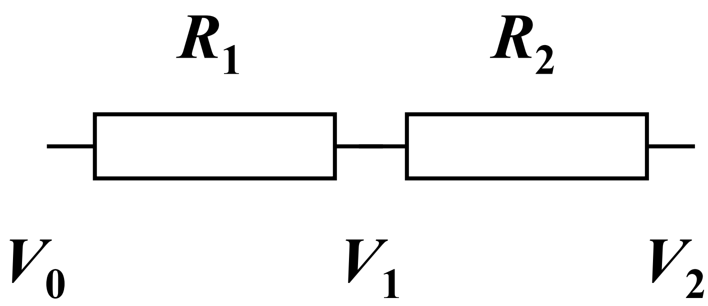




c_1=?

V_1=?

Układy wielowarstwowe



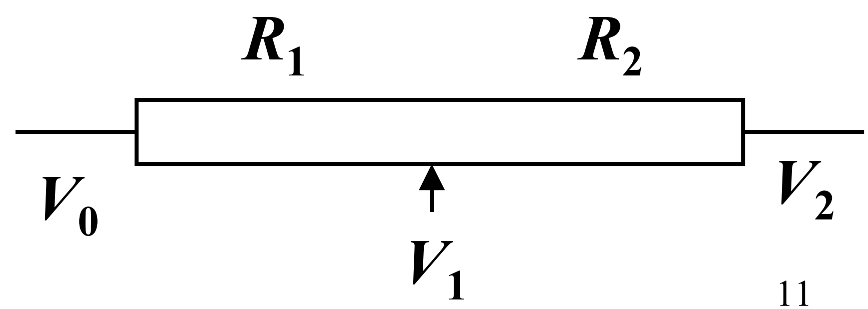
Znane: R_1 i R_2 oraz napięcie całkowite (V_2-V_0), szukane: V_1
Ponieważ oporniki są szeregowo połączone,

prąd w obwodzie jest stały, zatem:

$$\frac{V_1 - V_0}{R_1} = \frac{V_2 - V_0}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{V_1 = V_0 + \frac{R_1}{R_1 + R_2}\left(V_2 - V_0\right)}$$

Zasada działania potencjometru: płynna zmiana R_1 skutkuje płynną zmianą V_1 (przy stałym napięciu oraz oporze całkowitym)



Układy wielowarstwowe (SS,WBD)

x_0 x_1 x_2 x_{N-2} x_{N-1} x_N

Dane: c_0 | D_1 | D_2 | .... | D_{N-1} | D_N | c_N

Szukane: $c_1=?$ $c_2=?$ $c_{N-2}=?$ $c_{N-1}=?$

$$J = -D_n \frac{c_n - c_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$

$$J \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n - x_{n-1}}{D_n} = -\sum_{n=1}^{N} \left(c_n - c_{n-1}\right)$$

$$\boxed{J = -\frac{c_N - c_0}{\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{x_n - x_{n-1}}{D_n}}}$$

strumień w układzie

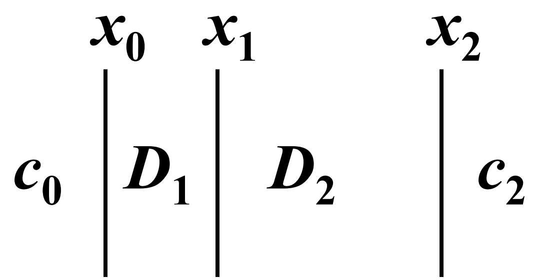
$$\frac{c_n - c_{n-1}}{c_N - c_0} = \frac{\frac{x_n - x_{n-1}}{D_n}}{\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{x_n - x_{n-1}}{D_n}}$$

$$\boxed{c_n = c_{n-1} + \frac{\frac{x_n - x_{n-1}}{D_n}}{\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{x_n - x_{n-1}}{D_n}} \left(c_N - c_0\right)}$$

wzór rekurencyjny

Układ dwuwarstwowy (SS,WBD)

Dane:



Szukane: $c_1 = ?$

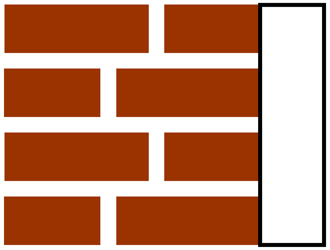
$$c_1 = c_0 + \frac{\dfrac{x_1 - x_0}{D_1}}{\dfrac{x_1 - x_0}{D_1} + \dfrac{x_2 - x_1}{D_2}} \left(c_2 - c_0\right)$$

$$\boxed{J = -\frac{D_1 D_2 \left(c_2 - c_0\right)}{D_1\left(x_2 - x_1\right) + D_2\left(x_1 - x_0\right)}}$$

$$\boxed{c_1 = \frac{c_0 D_1\left(x_2 - x_1\right) + c_2 D_2\left(x_1 - x_0\right)}{D_1\left(x_2 - x_1\right) + D_2\left(x_1 - x_0\right)}}$$

Przewodzenie ciepła (SS,WBD)

Strumień ciepła $J = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$



$\lambda \left(\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}} \right)$

Dane:

x_0 x_1 x_2

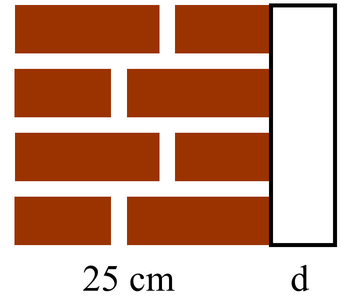
T_0 | λ_1 | λ_2 | T_2

Szukane: J

$$\boxed{J = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \left(T_2 - T_0\right)}{\lambda_1 \left(x_2 - x_1\right) + \lambda_2 \left(x_1 - x_0\right)}}$$

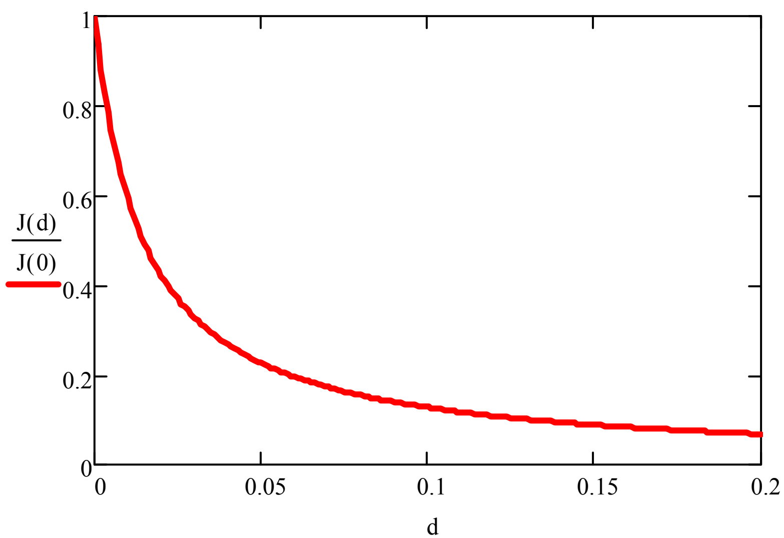
Przewodzenie ciepła (SS,WBD)

$$J = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \qquad \lambda_c = 0.6$$



$$\lambda_{PS} = 0.035 \ \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}\right)$$

$$\boxed{J = -\frac{\lambda_1 \lambda_2 (T_2 - T_0)}{\lambda_1 (x_2 - x_1) + \lambda_2 (x_1 - x_0)}}$$



d **(cm)**	**Oszczędności %**
2	**58**
5	**77**
10	**87**
15	**91**
20	**93**

Dotyczy tylko ścian!

Geometria cylindryczna (SS)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial (r \cdot J)}{\partial r}$$

r_0 r_1

Dane: c_0 lub J_0 D_1 c_1 lub J_1

Szukane: $c(r)=?$

Geometria cylindryczna (SS)

WD na lewym i prawym brzegu

$$\frac{\mathrm{d}(r \cdot J)}{\mathrm{d}r} = 0$$

$$\Downarrow \quad \text{z I prawa Ficka, dla } D = \text{const}$$

$$r\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = \mathrm{A}$$

$$\Downarrow \quad \int_{c_0}^{c(r)} \mathrm{d}c = \mathrm{A}\int_{\mathrm{r}_0}^{\mathrm{r}} \frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$c(r) - c_0 = A \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad \text{oraz} \quad c_1 - c_0 = A \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c(r) - c_0}{c_1 - c_0} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c(r) = \frac{c_0 \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) + c_1 \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}}$$

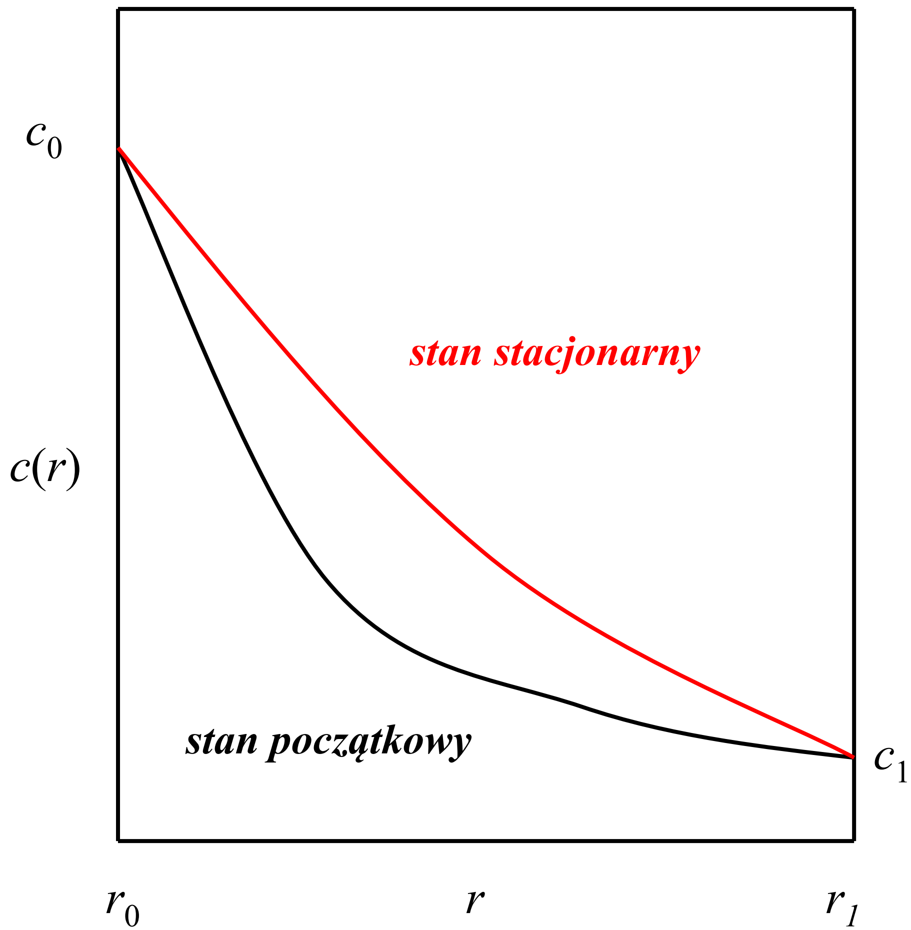
Geometria cylindryczna (SS)

WD na lewym i prawym brzegu

$$c(r) = \frac{c_0 \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r}\right) + c_1 \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}$$

$$J(r) = -\frac{D}{r}\frac{c_1 - c_0}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}$$

dyfuzja zachodzi, strumień nie jest stały!



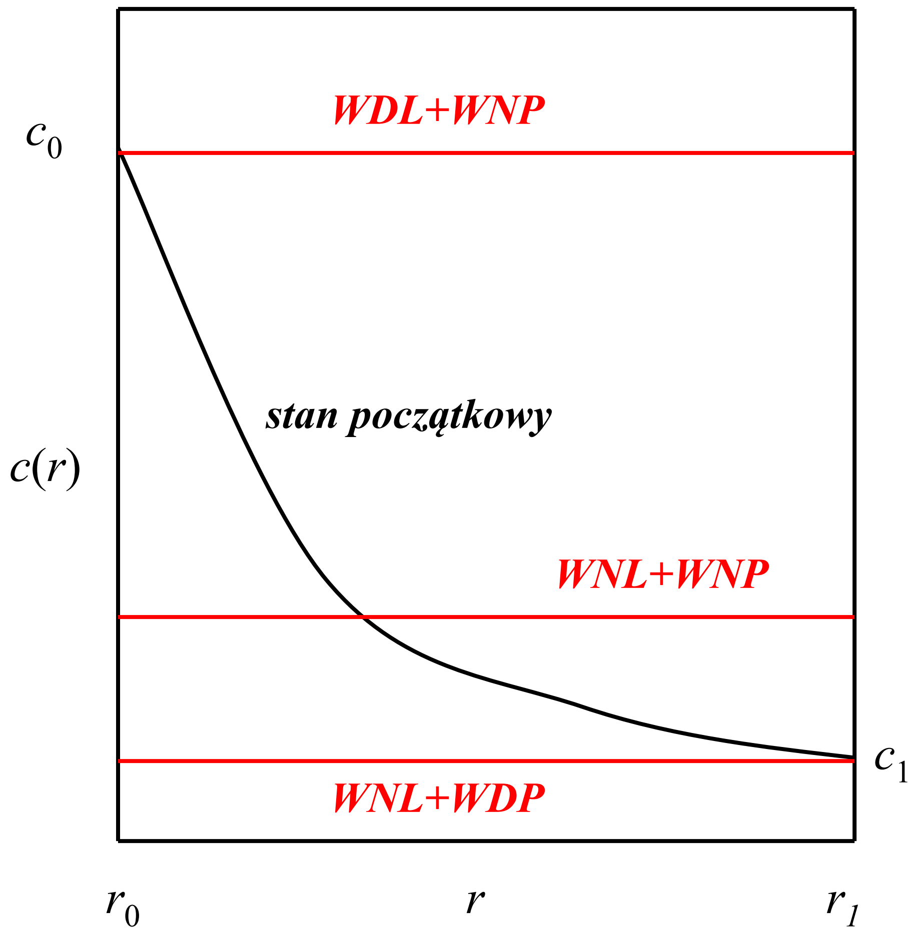
Geometria cylindryczna (SS)

WN na lewym i prawym brzegu

$$c(r) = \frac{1}{\pi\left(r_1^{\ 2} - x_0^{\ 2}\right)} \int_{r_0}^{r_1} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot c(r, t=0)\, dr$$

dyfuzja nie zachodzi!

Dla mieszanych warunków brzegowych rozwiązania analogiczne jak dla geometrii planarnej



Geometria sferyczna (SS)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 \cdot J\right)}{\partial r}$$

Dane:

r_0 $\qquad$ r_1

c_0 lub J_0 $\qquad$ D_1 $\qquad$ c_1 lub J_1

Szukane: $c(r)=?$

Geometria sferyczna (SS)

WD na lewym i prawym brzegu

$$\frac{\mathrm{d}\left(r^2 \cdot J\right)}{\mathrm{d}r} = 0$$

$\Downarrow$ z I prawa Ficka, dla $D = \mathrm{const}$

$$r^2 \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = \mathrm{A}$$

$$\Downarrow \quad \int_{c_0}^{c(r)} \mathrm{d}c = \mathrm{A} \int_{\mathrm{r}_0}^{\mathrm{r}} \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$c(r) - c_0 = -A\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \quad \text{oraz} \quad c_1 - c_0 = -A\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{c(r) - c_0}{c_1 - c_0} = \frac{r_1\left(r_0 - r\right)}{r\left(r_0 - r_1\right)} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c(r) = \frac{c_0 \cdot r_0\left(r_1 - r\right) + c_1 \cdot r_1\left(r - r_0\right)}{r\left(r_1 - r_0\right)}}$$

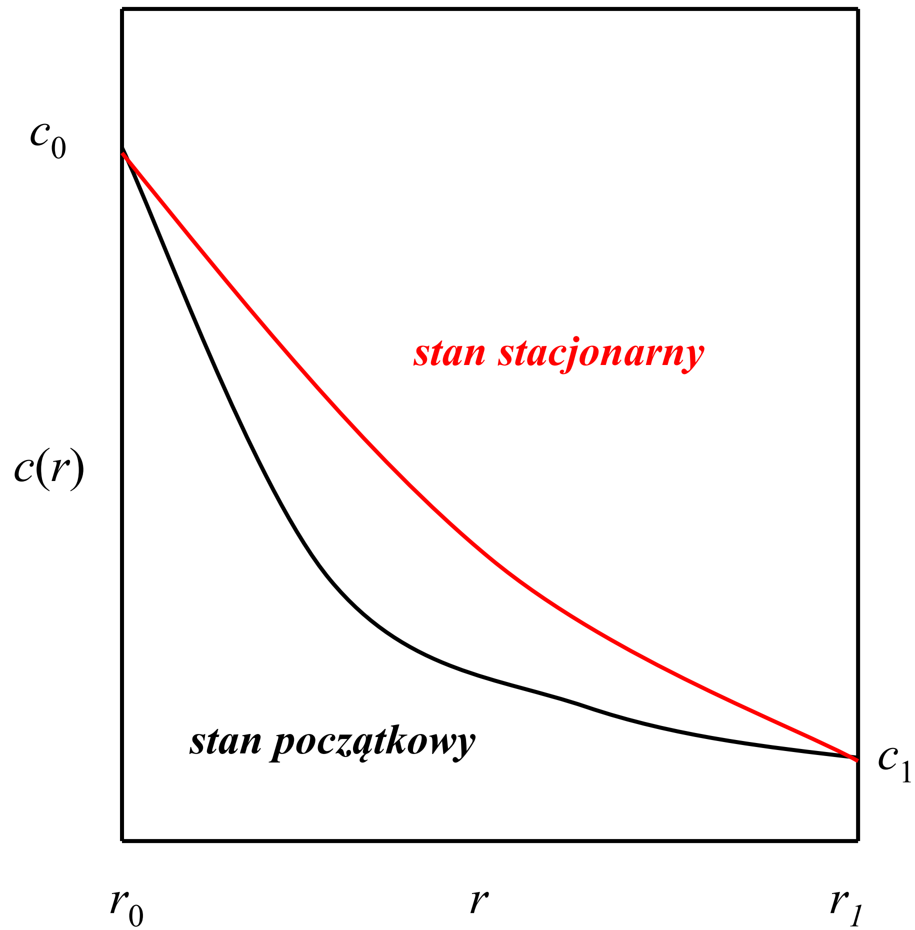
Geometria sferyczna (SS)

WD na lewym i prawym brzegu

$$\boxed{c(r) = \frac{c_0 \cdot r_0(r_1 - r) + c_1 \cdot r_1(r - r_0)}{r(r_1 - r_0)}}$$

$$\boxed{J(r) = -\frac{D \cdot r_0 \cdot r_1}{r^2} \frac{c_1 - c_0}{r_1 - r_0}}$$

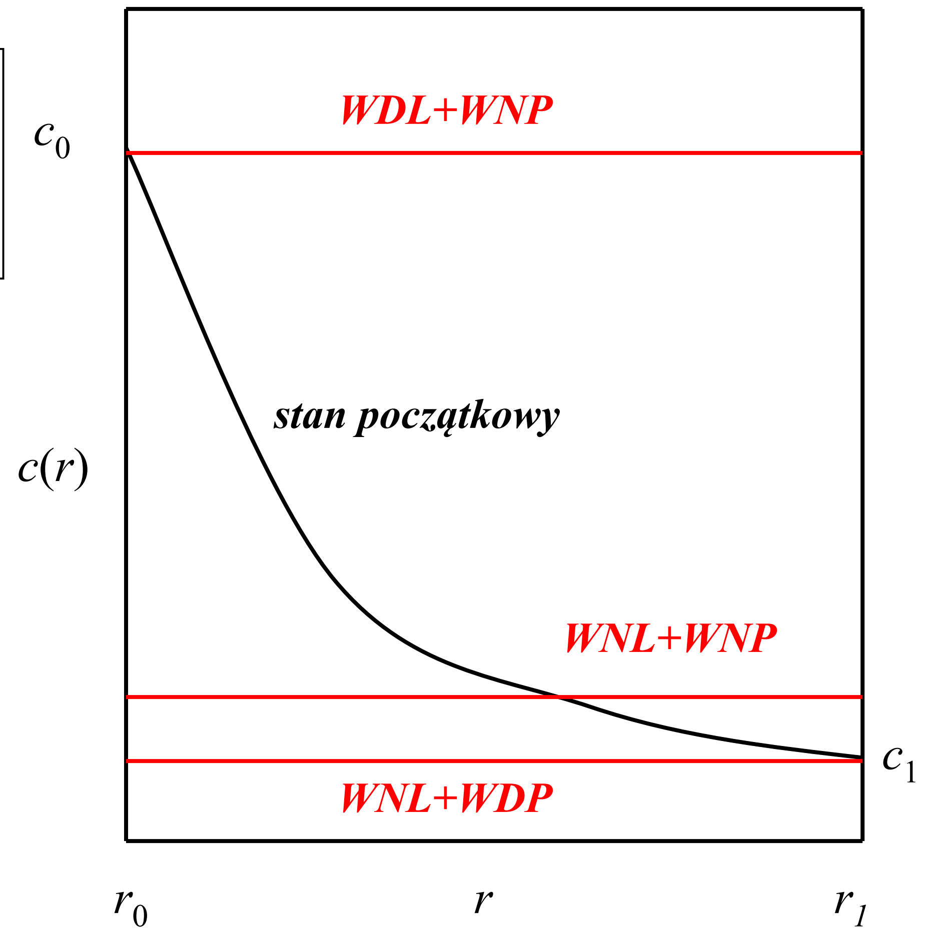
dyfuzja zachodzi, strumień nie jest stały!



Geometria sferyczna (SS)

WN na lewym i prawym brzegu

$$c(r) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\left(r_1^{\,3} - x_0^{\,3}\right)} \int_{r_0}^{r_1} 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot c(r, t=0)\,dr$$



dyfuzja nie zachodzi!

Dla mieszanych warunków brzegowych rozwiązania analogiczne jak dla geometrii planarnej

Ukł. dwuwymiarowy (SS, WBD)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 = -\frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y}$$

WBD: temperatury na brzegach

Dane:

Szukane: ***T*(*x*,*y*)=?**

$$0 = -\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

Równanie Laplace'a

Ukł. dwuwymiarowy (SS, WBD)

$$0 = -\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}$$

Rozwiązanie numeryczne np. w Excelu, przy użyciu Solvera, zobacz: **D. Bourg, *Excel w nauce i technice. Receptury***

Dla kwadratowej płyty, przy D=const:

$$0 = c_{i-1,j} - 2c_{i,j} + c_{i+1,j} + c_{i,j-1} - 2c_{i,j} + c_{i,j+1}$$

$$0 = 4c_{i,j} - \left(c_{i-1,j} + c_{i+1,j} + c_{i,j-1} + c_{i,j+1}\right)$$