

# INFORMATYKA

## ELEMENTY METOD NUMERYCZNYCH

<http://www.infoceram.agh.edu.pl>

# METODY NUMERYCZNE

**Metody numeryczne** – zbiór metod rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą operacji na liczbach.

Otrzymywane tą drogą wyniki są z reguły przybliżone, jednak dokładność obliczeń może być z góry określona i dobrana w zależności od potrzeb. Metody numeryczne są stosowane gdy dany problem nie ma w ogóle rozwiązania analitycznego lub wykorzystanie takiego rozwiązania jest utrudnione ze względu na jego złożoność.

Typowe zastosowania metod numerycznych:

- znajdowanie miejsc zerowych wielomianów stopnia większego niż 2
- rozwiązywanie układów równań liniowych w przypadku większej liczby równań i niewiadomych
- aproksymacja, czyli przybliżanie nieznanymi funkcji
- rozwiązywanie równań różniczkowych i układów takich równań
- całkowanie

# PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ METOD NUMERYCZNYCH

- metoda Hornera obliczania wartości wielomianów
- określanie miejsc zerowych funkcji
  - metoda bisekcji (połowienia przedziału)
  - metoda siecznych
  - metoda stycznych (Newtona)
  - metoda iteracji prostej
- rozwiązywanie układów równań
- aproksymacja
- interpolacja
- numeryczne obliczanie pochodnych
- całkowanie numeryczne

# OBLICZANIE WARTOŚCI WIELOMIANÓW - algorytm Hornera

Aby obliczyć wartość wielomianu 3 stopnia zazwyczaj korzysta się z algorytmu, w którym wykonuje się 6 mnożeń i 3 dodawania).

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = axxx + bxx + cx + d$$

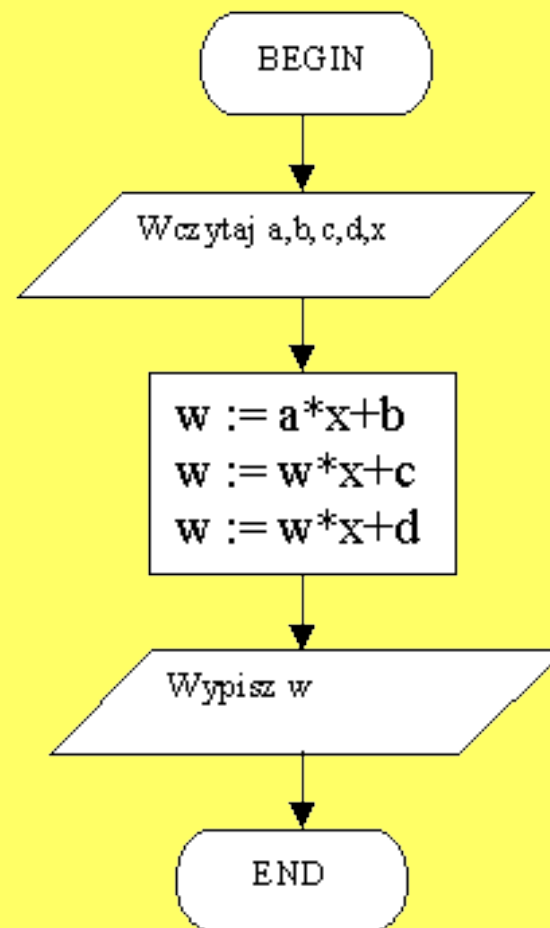
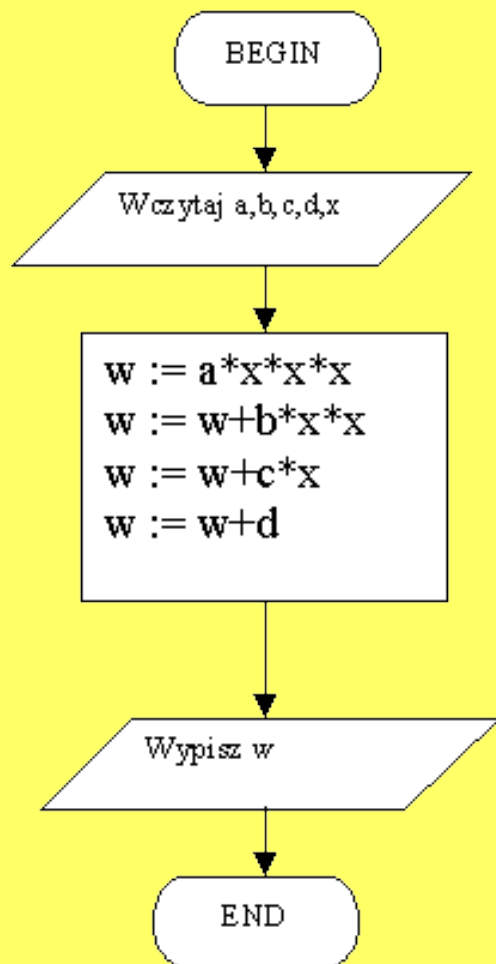
Aby zmniejszyć liczbę działań, wielomian 3 stopnia można przekształcić do następującej postaci:

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = (ax^2 + bx + c)x + d = ((ax + b)x + c)x + d$$

# ALGORYTM HORNERA 3 STOPNIA

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = axxx + bxx + cx + d$$

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = (ax^2 + bx + c)x + d = ((ax + b)x + c)x + d$$



# ALGORYTM HORNERA 3 STOPNIA

Metoda zwykła:

Liczba mnożeń =  $0,5 n (n + 1)$

gdzie  $n$  jest stopniem wielomianu

Metoda Hornera:

Liczba mnożeń =  $n$

Stopień wielomianu	Liczba mnożeń metodą zwykłą	Liczba mnożeń metodą Hornera
2	3	2
3	6	3
5	15	5
10	55	10
20	210	20

# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

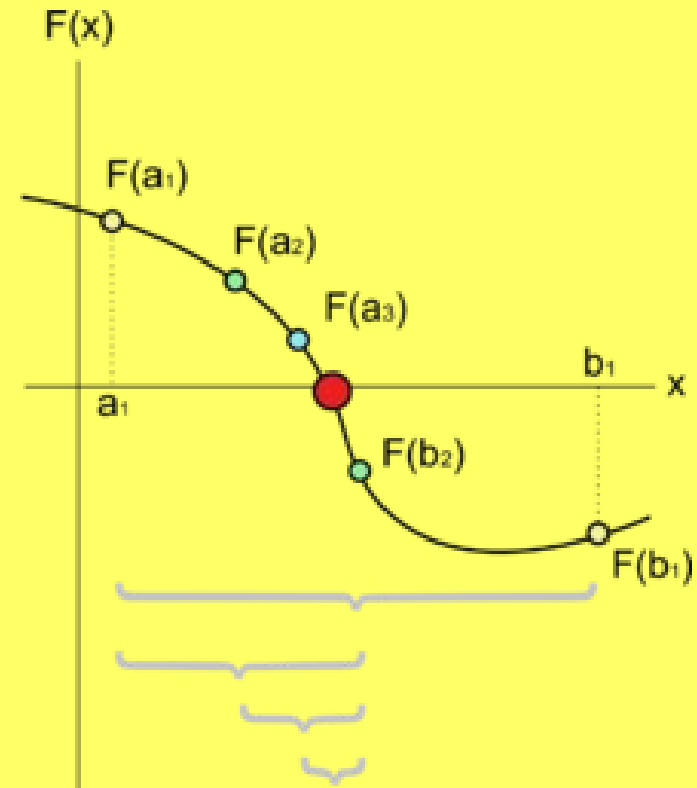
- Metoda bisekcji (połowienia przedziału)
- Metoda siecznych
- Metoda stycznych (Newtona)
- Metoda iteracji prostej

# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI - metoda bisekcji (połowienia przedziału)

Metoda opiera się na twierdzeniu Bolzano-Cauchy'ego:  
Jeżeli funkcja ciągła  $f(x)$  ma na końcach przedziału domkniętego wartości różnych znaków, to wewnątrz tego przedziału, istnieje co najmniej jedno miejsce zerowe tej funkcji:  
 $f(x) = 0$

Założenia:

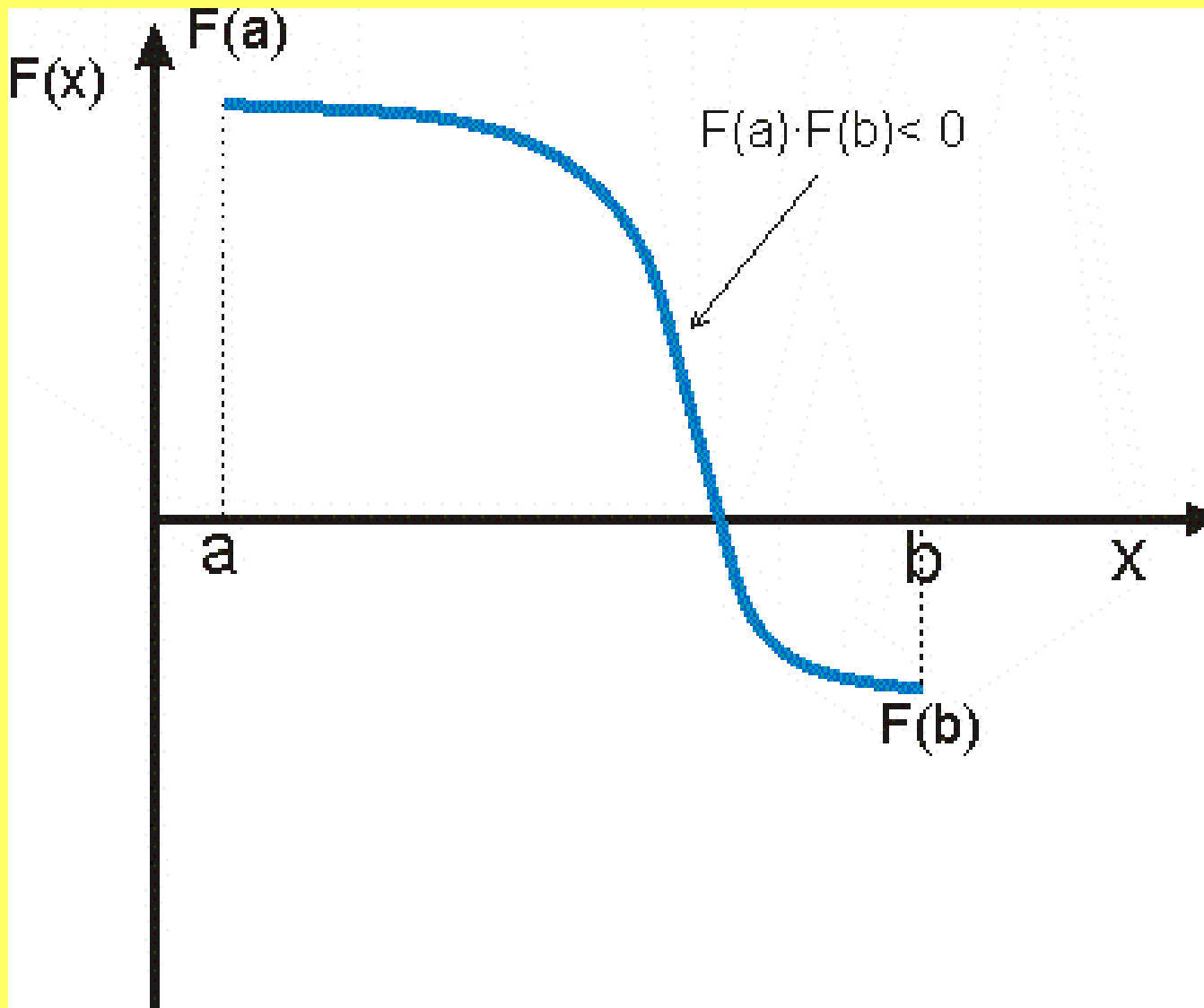
- $f(x)$  jest funkcją ciągłą w rozważanym przedziale domkniętym  $[a, b]$
- funkcja  $f(x)$  przyjmuje różne znaki na końcach przedziału, tj.  $f(a) f(b) < 0$





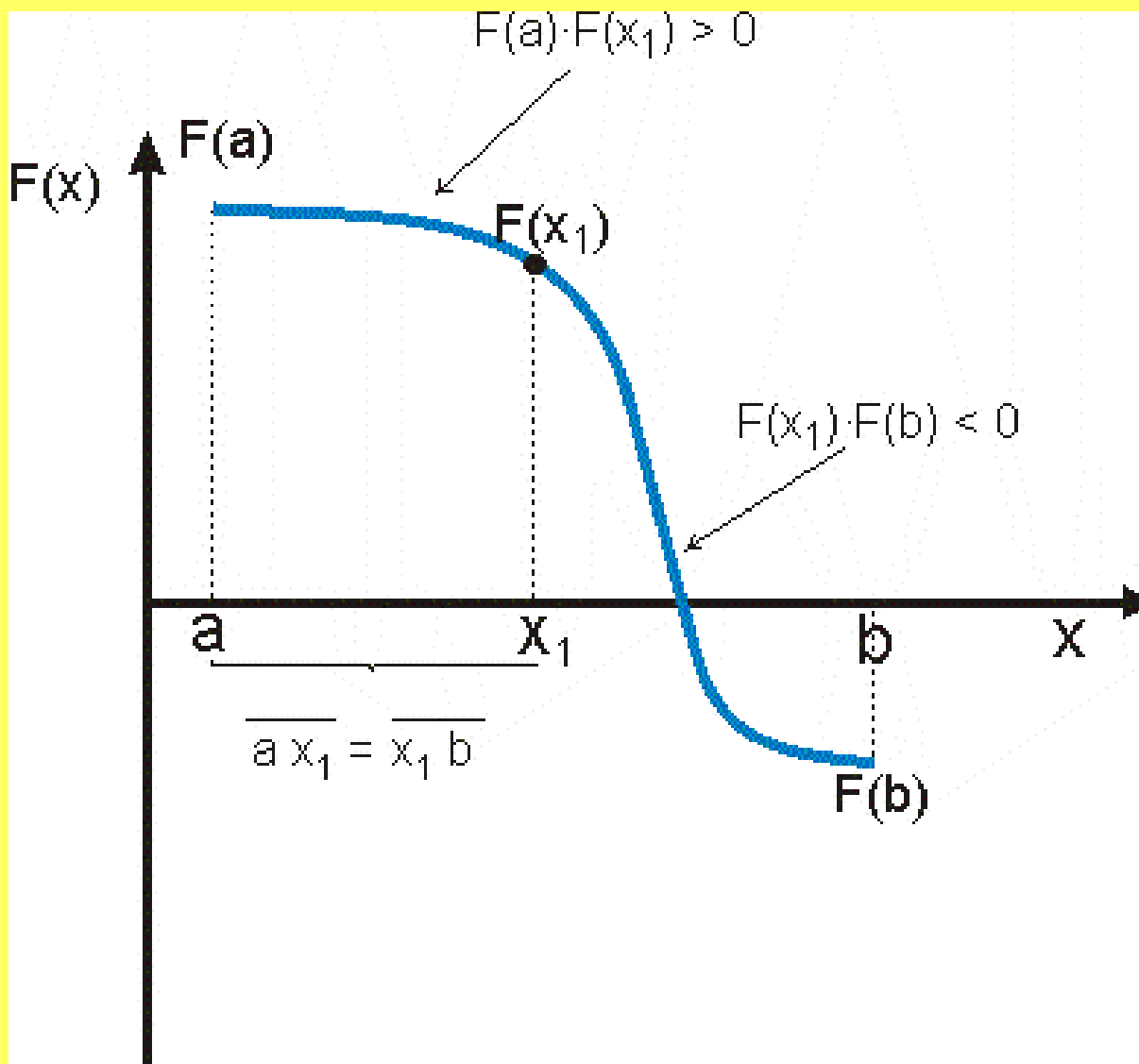
# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

- metoda bisekcji (połowienia przedziału)



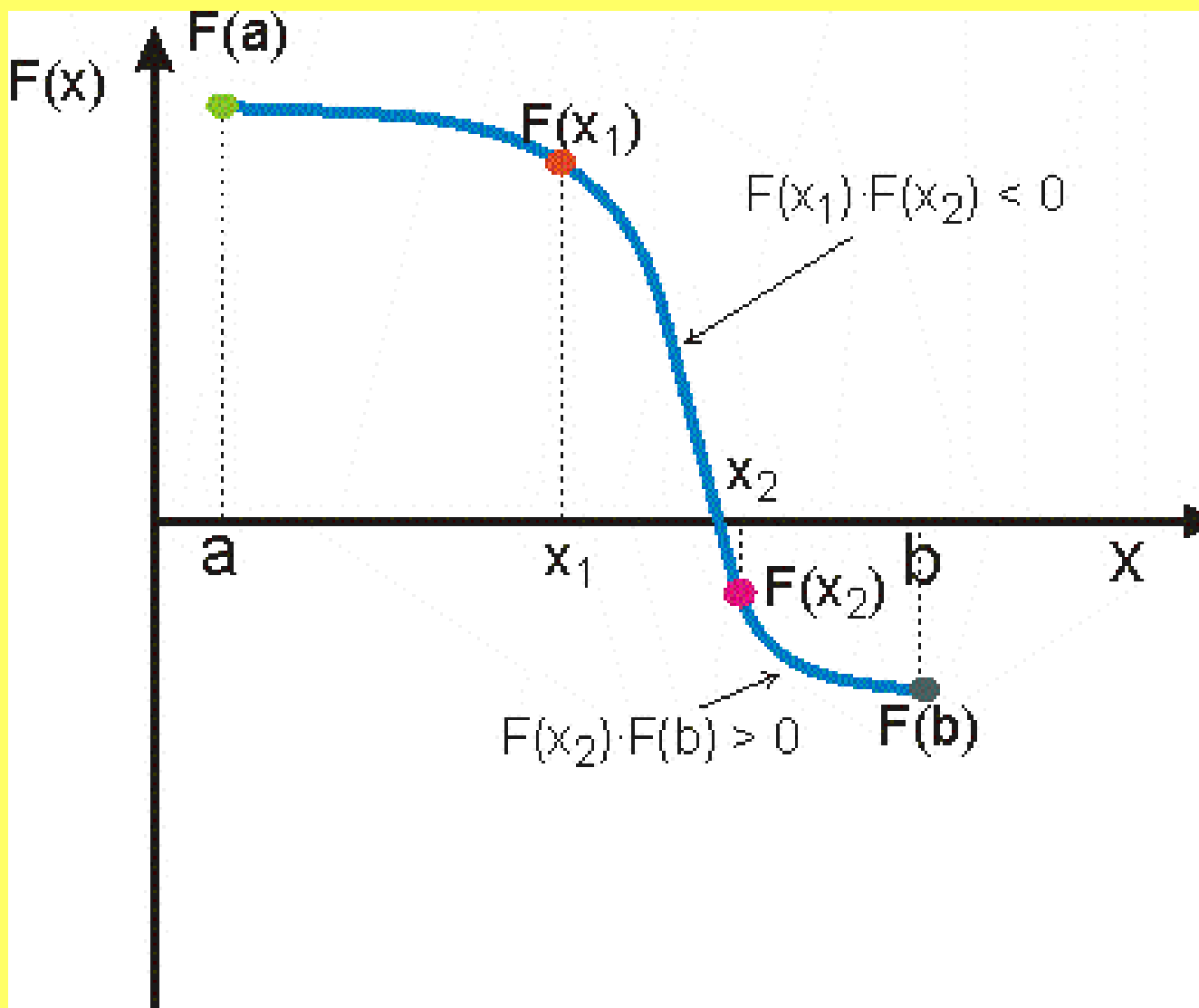
# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

- metoda bisekcji (połowienia przedziału)



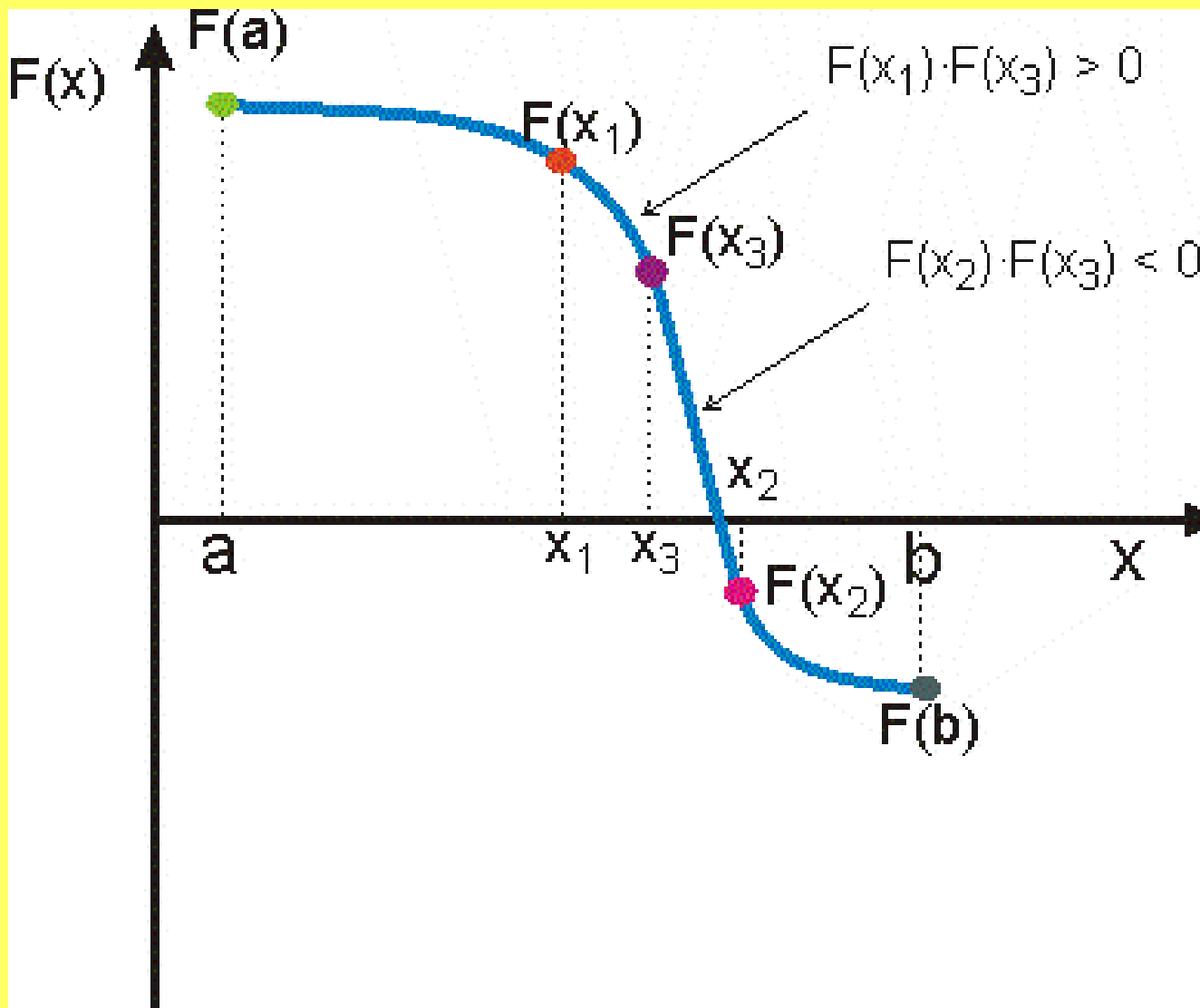
# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

- metoda bisekcji (połowienia przedziału)



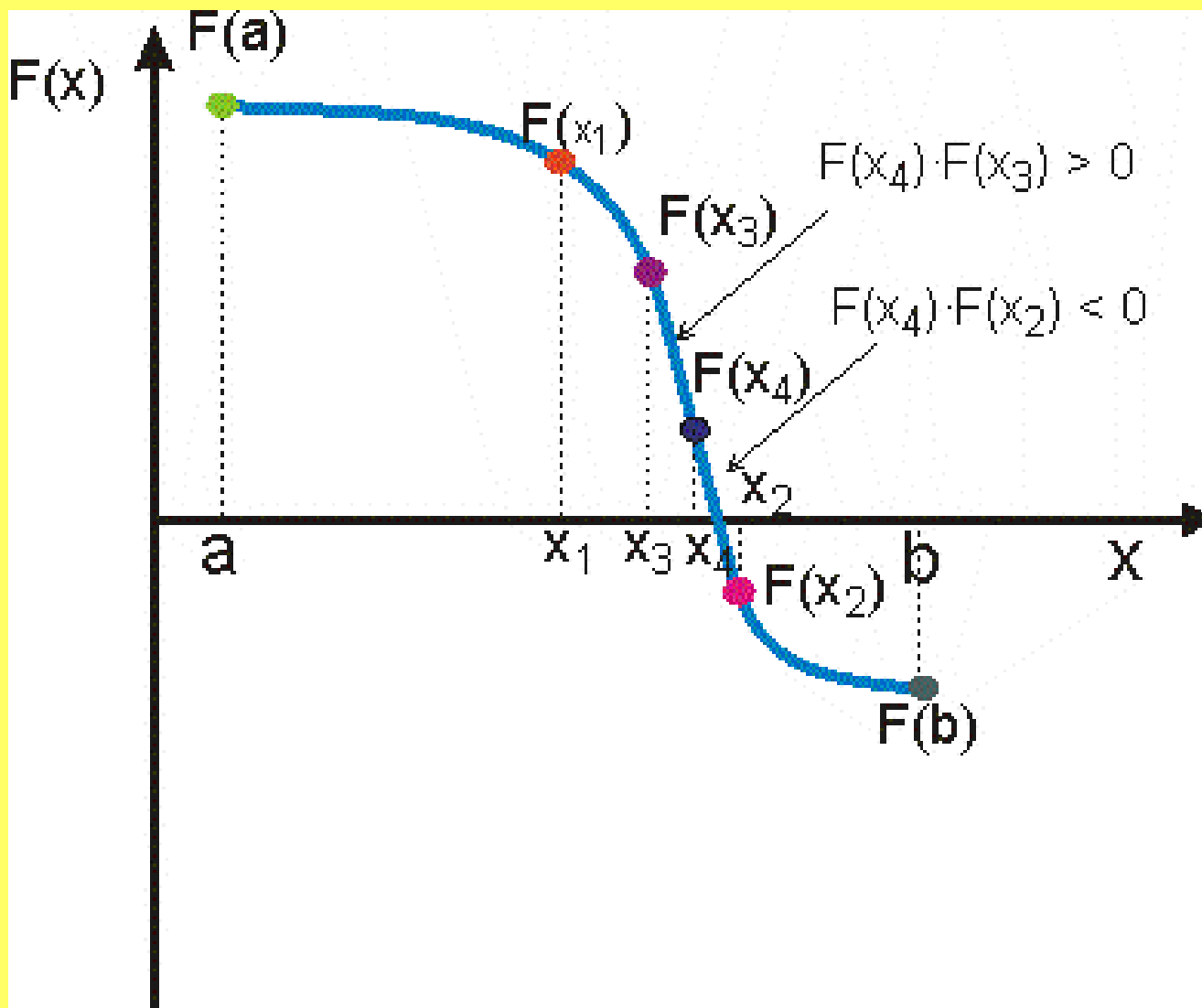
# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

- metoda bisekcji (połowienia przedziału)



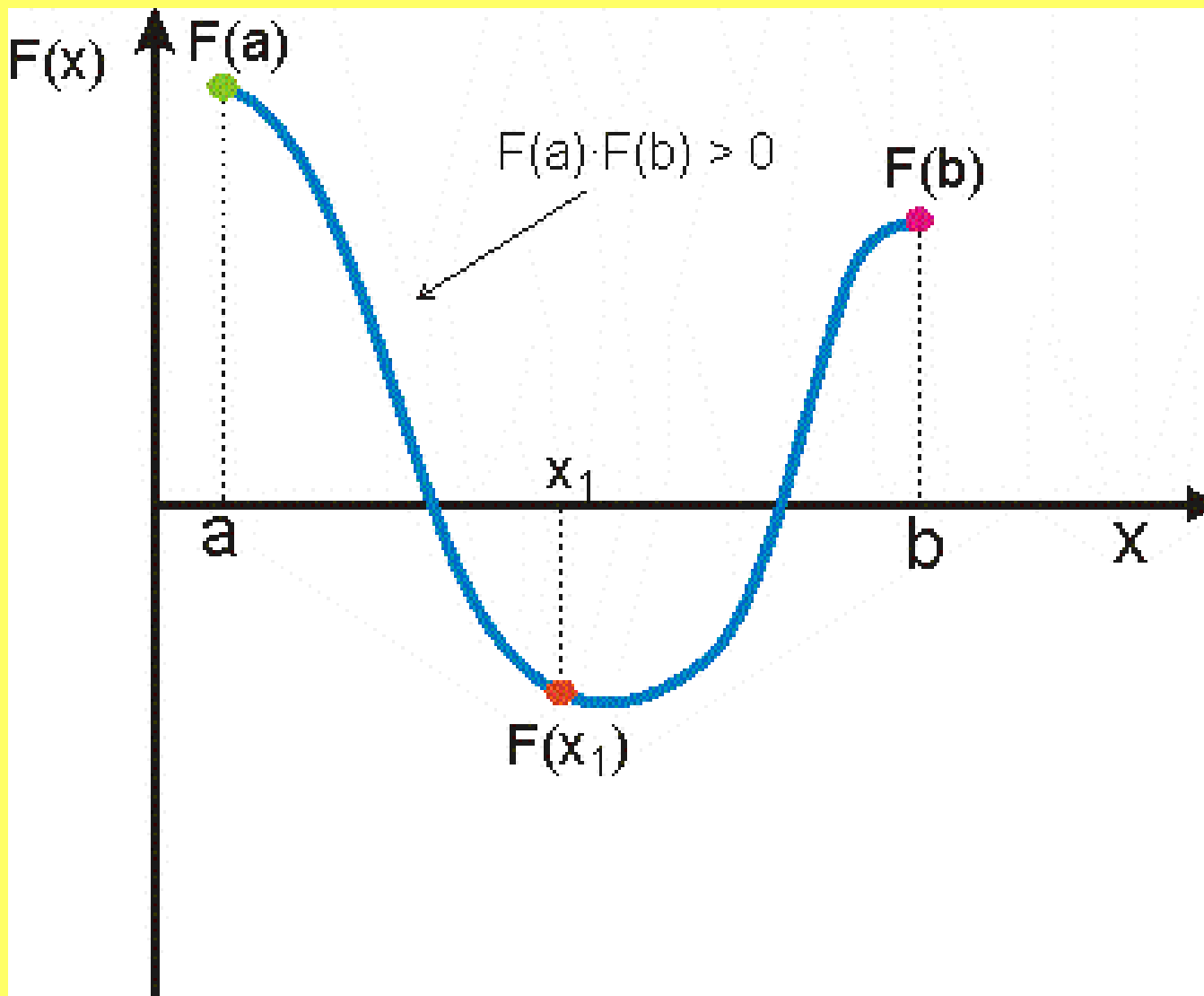
# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

- metoda bisekcji (połowienia przedziału)



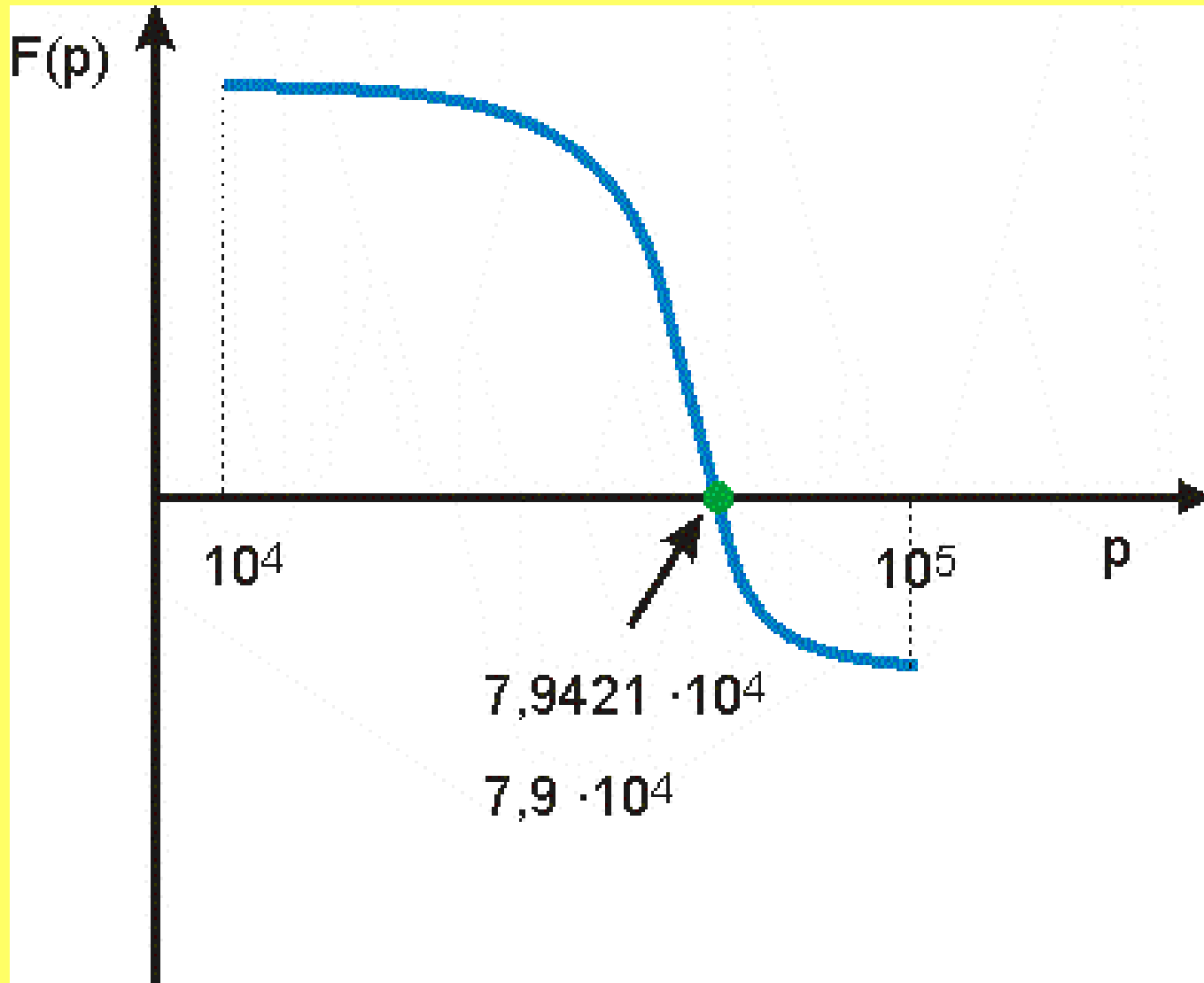
# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

- metoda bisekcji (połowienia przedziału)



# METODA BISEKCJI

- błąd wyznaczonego miejsca zerowego



# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

- metoda bisekcji (połowienia przedziału), c.d.

## ZALETY:

- prostota i uniwersalność
- gwarantowana zbieżność przy spełnionych założeniach
- możliwość kontroli błędu z jakim znaleziono miejsce zerowe

## WADY:

- zbieżność metody jest stosunkowo wolna



# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

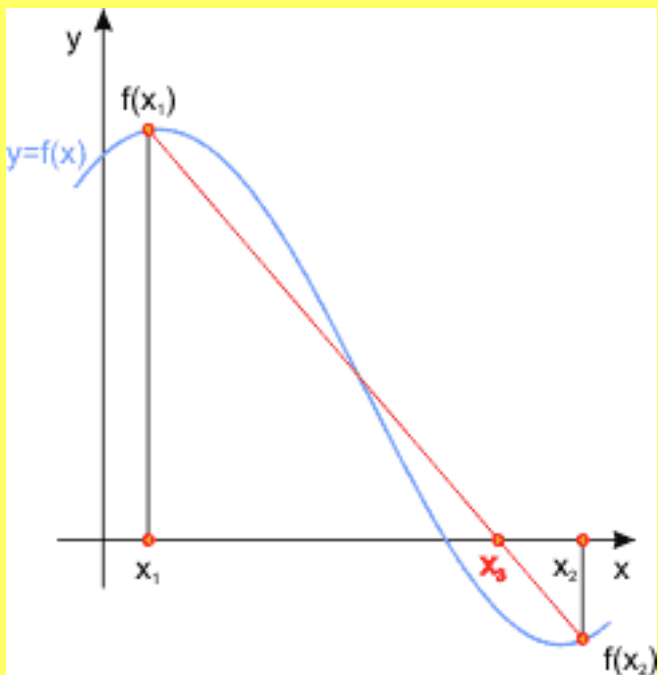
## - metoda siecznych

Metoda siecznych (interpolacji liniowej) opiera się na założeniu, że każda funkcja  $f(x)$  na odpowiednio małym odcinku zmienia się w przybliżeniu w sposób liniowy, co oznacza że na tym odcinku można ją zastąpić sieczną. Punkt przecięcia siecznej z osią odciętych przyjmuje się za przybliżoną wartość miejsca zerowego danej funkcji.

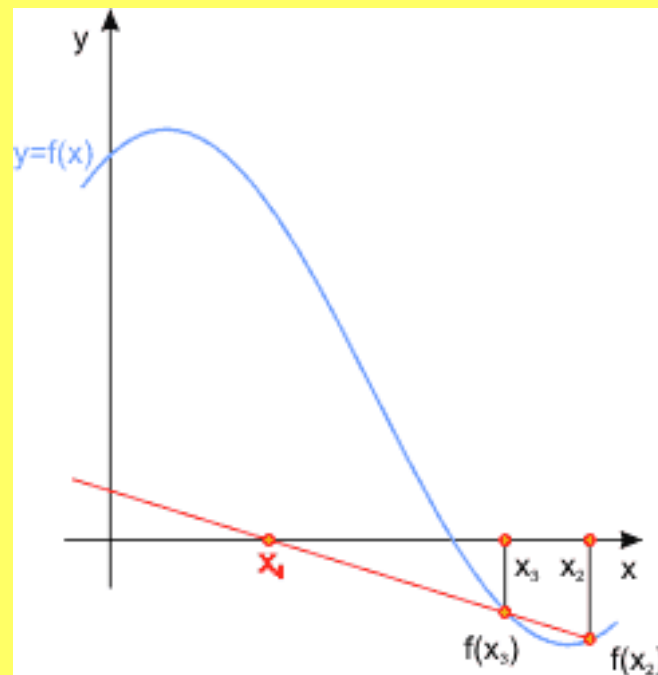
Założenia:

- $f(x)$  jest funkcją ciągłą w rozważanym przedziale  $[a, b]$
- funkcja  $f(x)$  przyjmuje różne znaki na końcach przedziału, tj.  $f(a) f(b) < 0$
- w przedziale  $[a, b]$  pierwsza pochodna  $f'(x)$  jest różna od zera. Nie istnieje zatem minimum lub maksimum lokalne. Ten warunek gwarantuje brak równoległości siecznej do osi odciętych, co umożliwia wyznaczenie punktu przecięcia siecznej z osią.

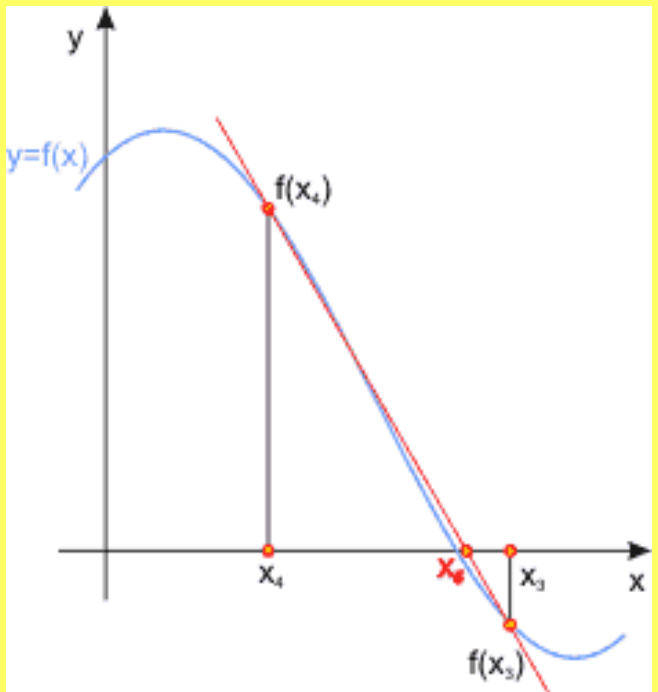
a)



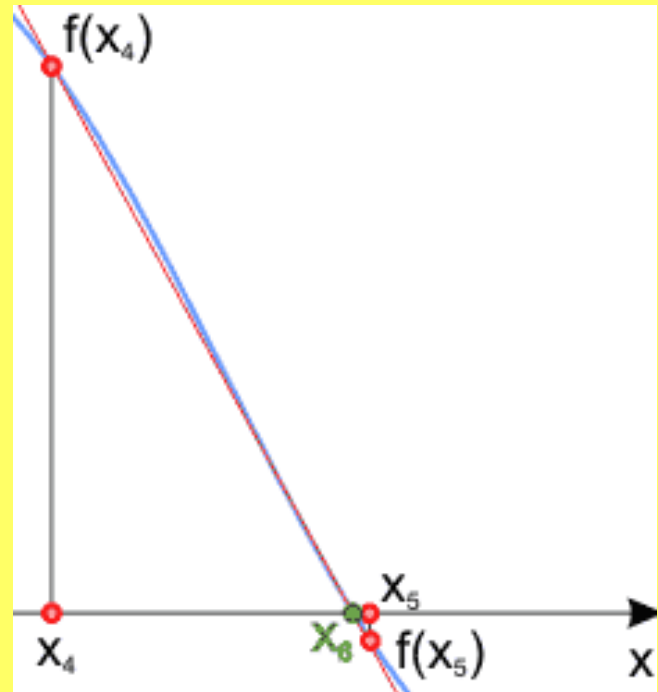
b)



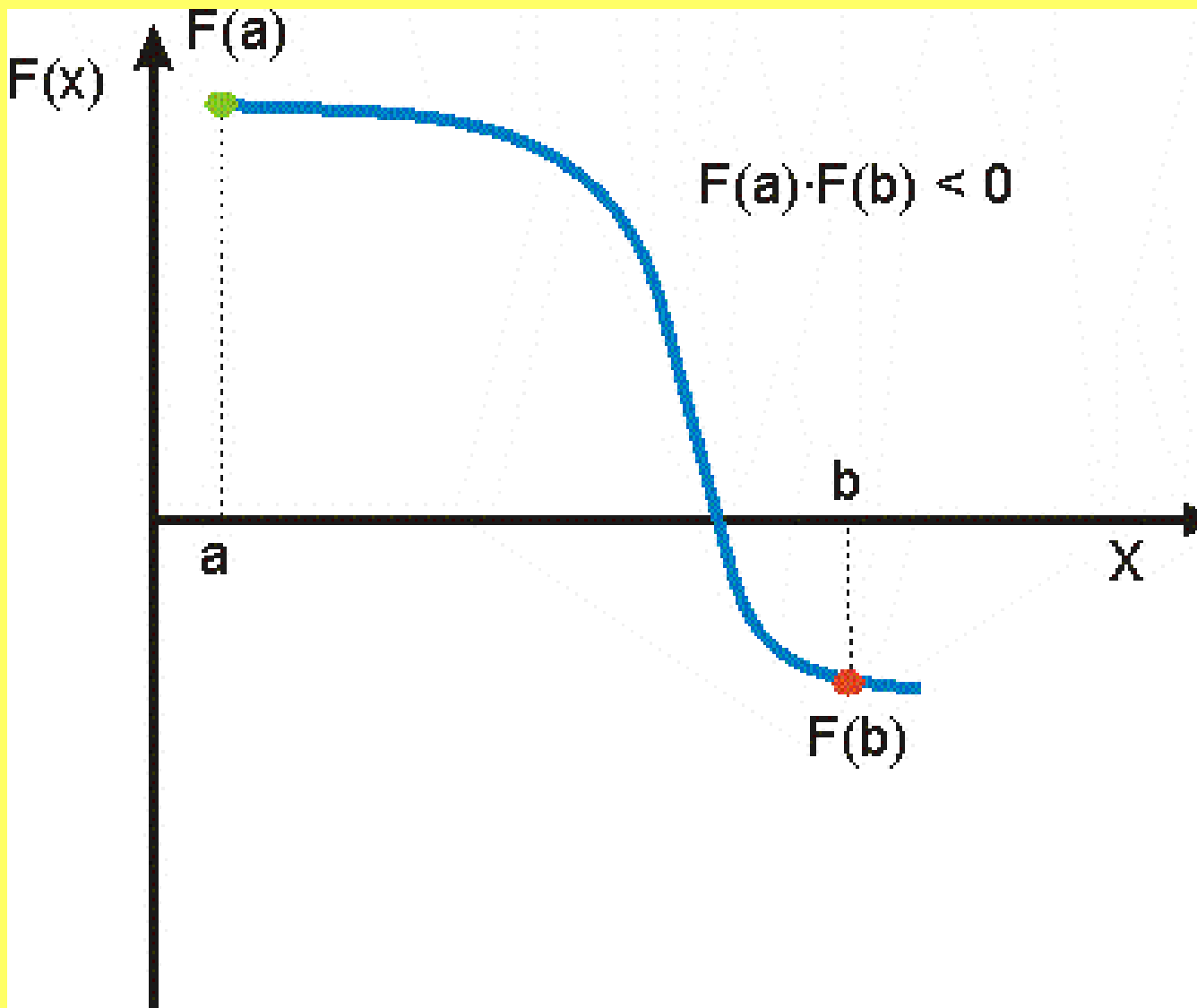
c)



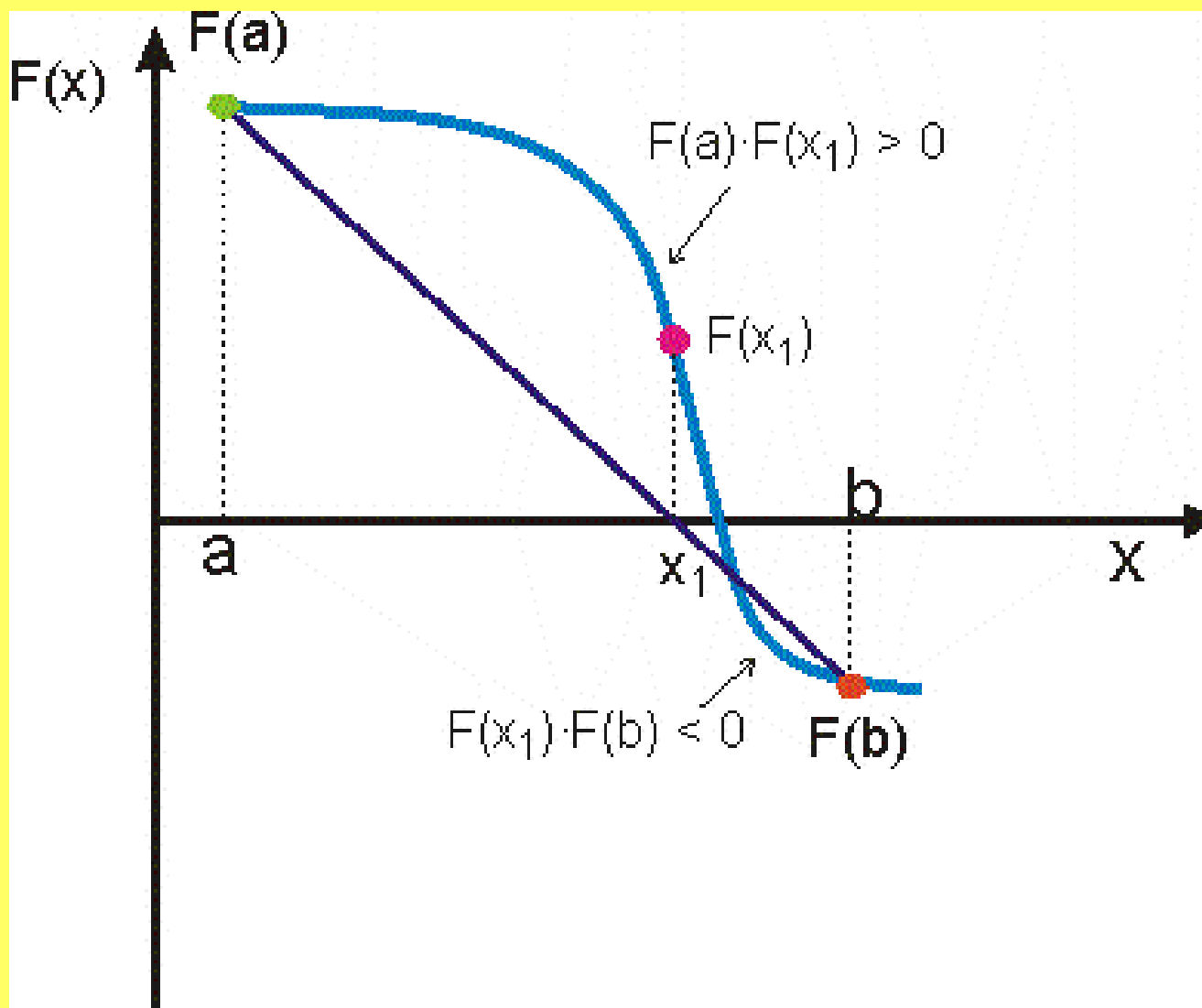
d)



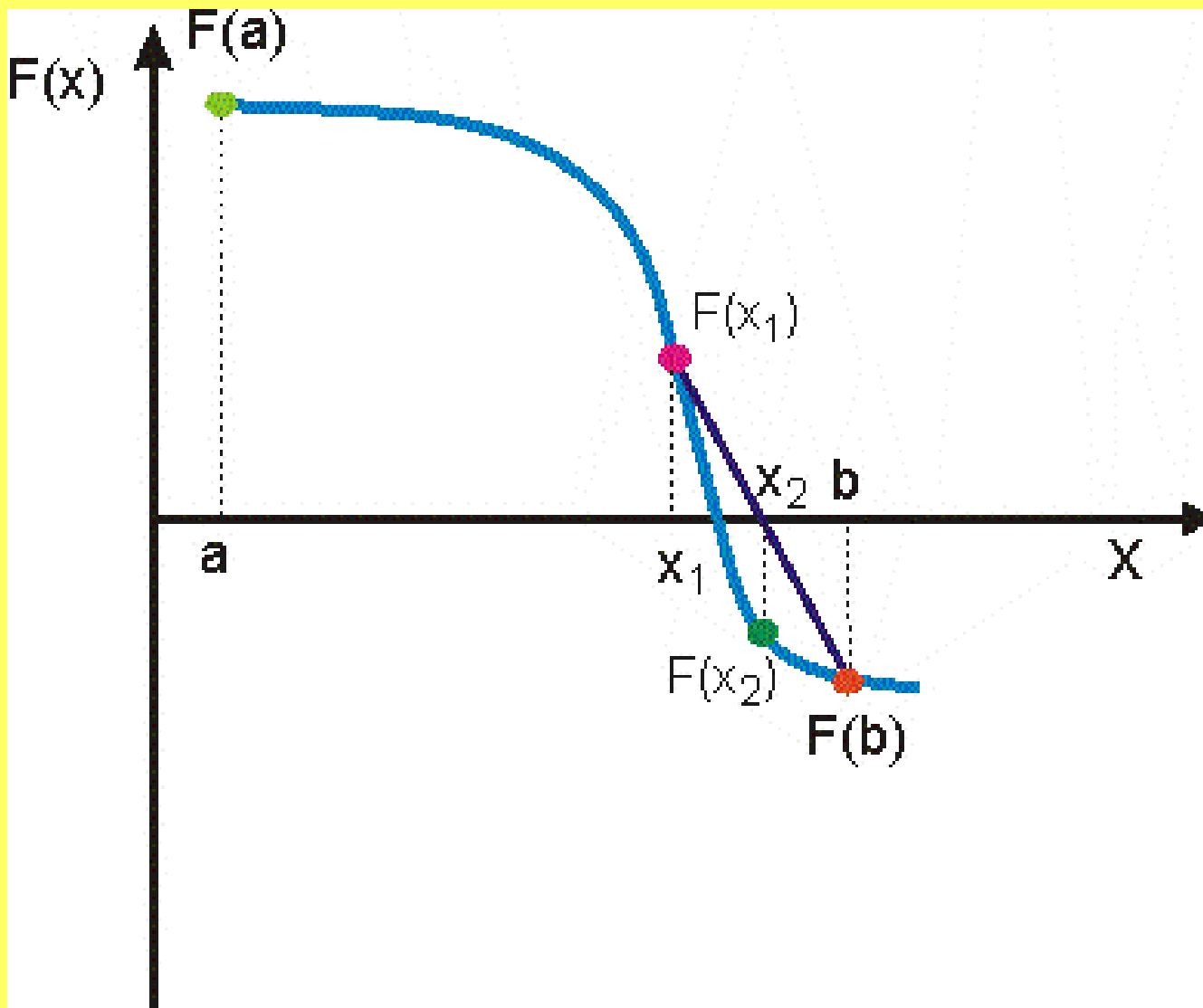
# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI - metoda siecznych



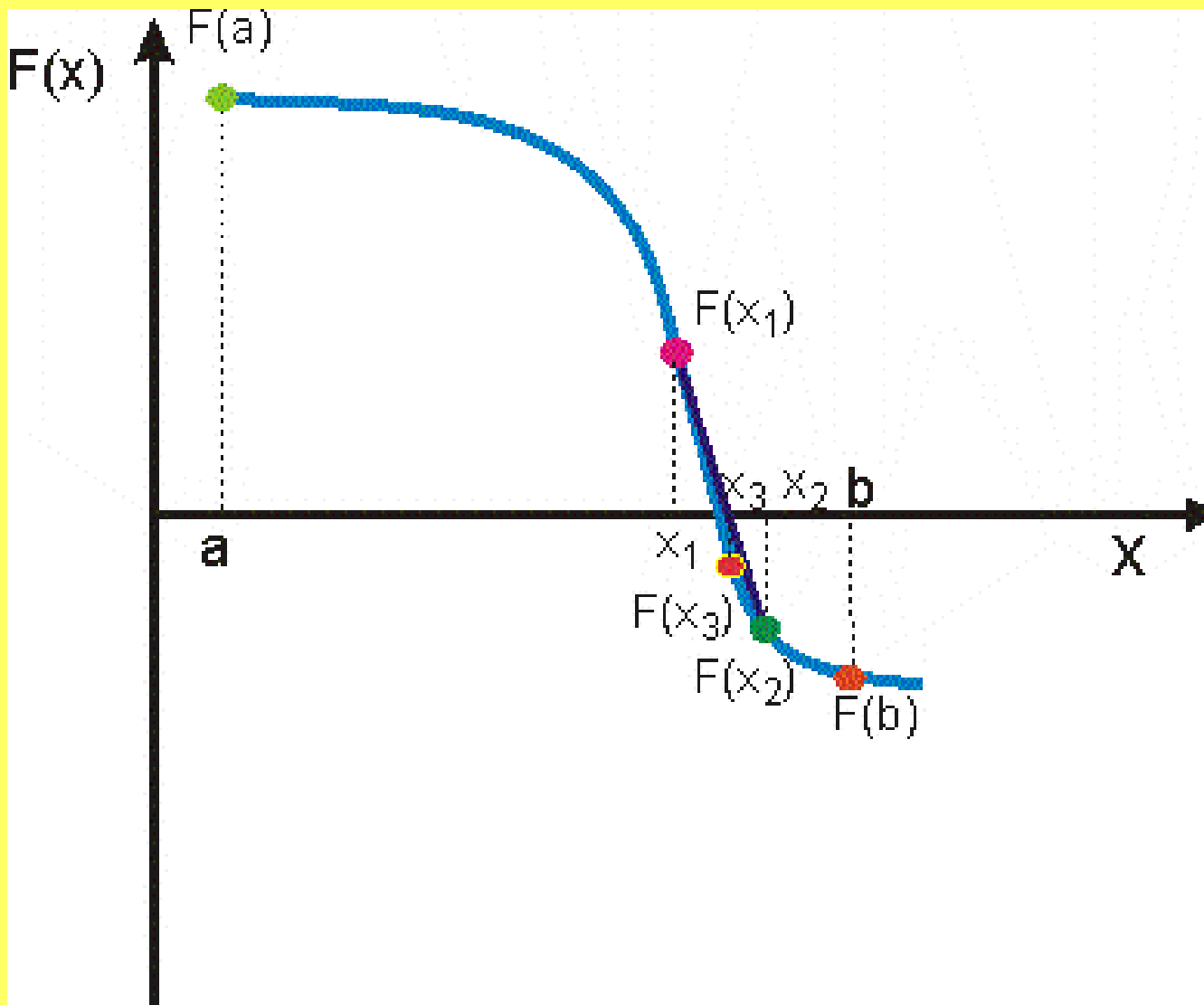
# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI - metoda siecznych



# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI - metoda siecznych



# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI - metoda siecznych



# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

## - metoda siecznych, c.d.

### ZALETY:

- nie wymaga obliczania pochodnej funkcji
- jest efektywniejsza od metody stycznych (Newtona)

### WADY:

- jest zbieżna lokalnie, co oznacza, że może zdarzyć się, iż wyznaczona wartość oddala się od rzeczywistego miejsca zerowego.

# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI - metoda stycznych (Newtona)

Nazywana jest również metodą Newtona lub Newtona-Raphsona

Założenia:

- $f(x)$  jest funkcją ciągłą w rozważanym przedziale domkniętym  $[a, b]$
- w przedziale  $[a, b]$  znajduje się dokładnie jeden pierwiastek
- funkcja ma różne znaki na krańcach przedziału, tj.  $f(a) f(b) < 0$
- pierwsza i druga pochodna funkcji mają stały znak w danym przedziale

W pierwszym kroku metody wybierany jest punkt startowy  $x_1$  (zazwyczaj jest to wartość  $a$ ,  $b$ ,  $0$  lub  $1$ ), z którego następnie wyprowadzana jest styczna w  $f(x_1)$ . Położenie punktu przecięcia stycznej z osią odciętych jest pierwszym przybliżeniem rozwiązania (ozn.  $x_2$ ). O ile to przybliżenie jest niedostateczne, wówczas punkt  $x_2$  jest wybierany jako nowy punkt startowy i wszystkie czynności są powtarzane. Proces jest kontynuowany, aż do uzyskania satysfakcjonującego przybliżenie pierwiastka.

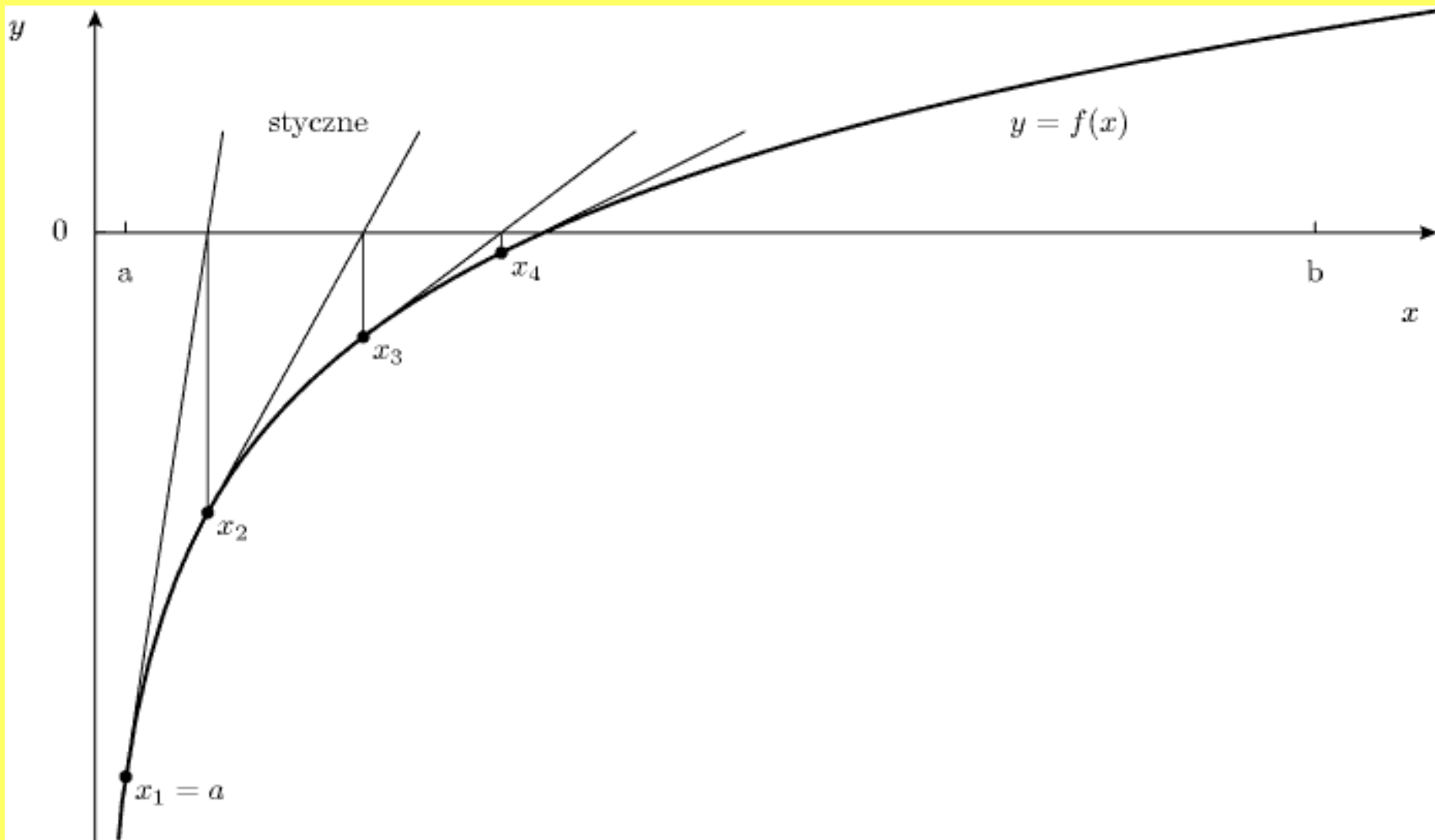
Kolejne przybliżenia dane są wzorem:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

- metoda stycznych (Newtona), c.d.



# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

## - metoda stycznych (Newtona), c.d.

### ZALETY:

- cechuje się szybką zbieżnością, a błąd wyznaczonego miejsca zerowego maleje kwadratowo wraz z ilością iteracji.

### WADY:

- jest zbieżna lokalnie, co oznacza, że może zdarzyć się, iż wyznaczona wartość oddala się od rzeczywistego miejsca zerowego
- potencjalne problemy z wyznaczaniem pierwiastków wielokrotnych
- konieczność obliczania pierwszej i drugiej pochodnej funkcji

# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

## - metoda iteracji prostej

Metoda iteracji prostej Banacha składa się z dwóch etapów. Najpierw równanie  $f(x) = 0$  należy przekształcić do równoważnej postaci  $x = g(x)$

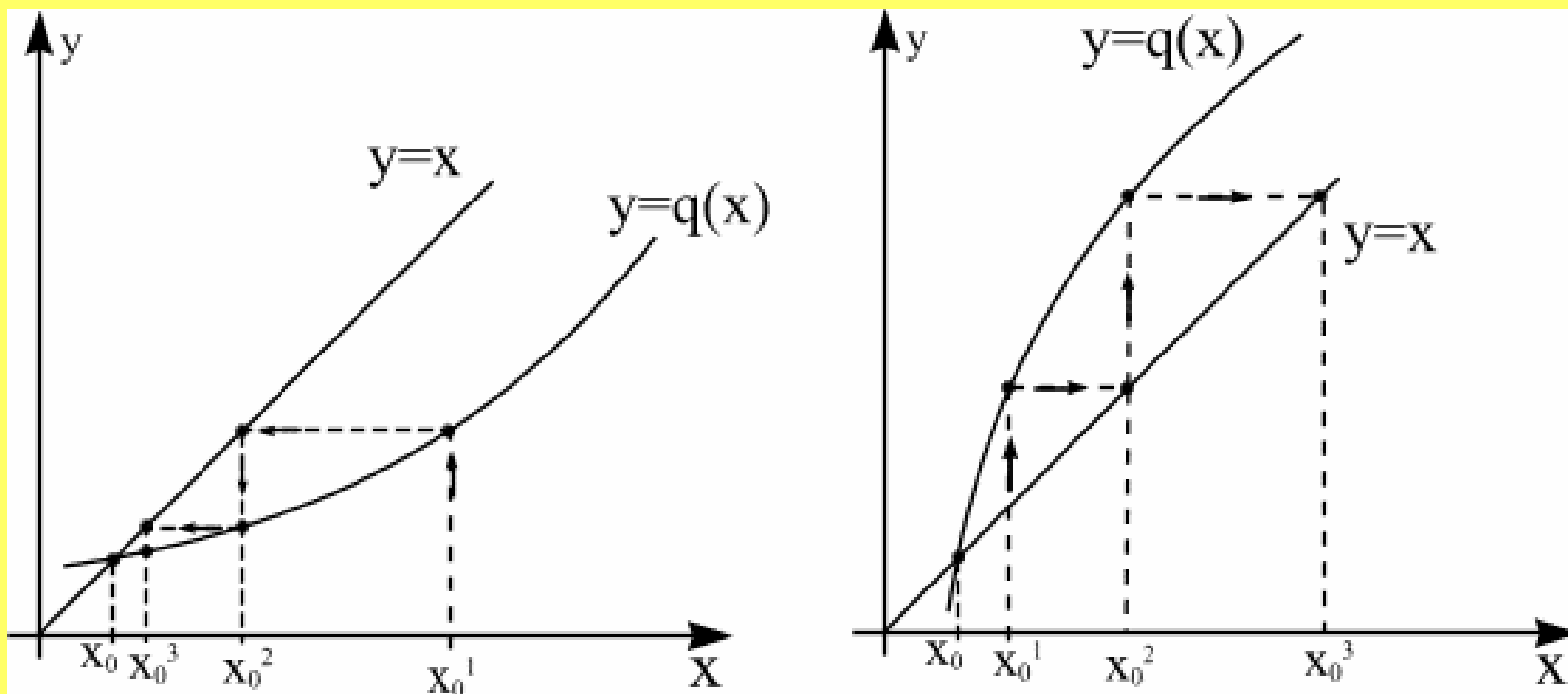
Takie przekształcenie jest zawsze wykonalne, np. dodając  $x$  do obu stron równania  $f(x)=0$  i zazwyczaj można je wykonać kilkoma sposobami.

Następnie należy wybrać pierwsze przybliżenie  $x_0$ , dla którego oblicza się wartość funkcji  $g(x)$ , po czym przyjmuje się że nowe przybliżenie  $x_0$ , uzyskuje się z równości  $x = g(x)$ . Kolejne iteracje obliczane są ze wzoru  $x_{n+1} = g(x_n)$

# SZUKANIE MIEJSC ZEROWYCH FUNKCJI

## - metoda iteracji prostej, c.d.

Pierwszy punkt przybliżenia należy przyjąć w jak najbliższym sąsiedztwie pierwiastka równania. Funkcja  $g(x)$  powinna być tak dobrana aby proces był jak najszybciej zbieżny. Niżej zamieszczony rysunek prezentuje dwa przypadki, gdy metoda jest zbieżna i rozbieżna.



# ROZWIĄZYWANIE UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH

**Równanie algebraiczne** – równanie w postaci  $W(x) = 0$ , gdzie  $W(x)$  jest wielomianem stopnia  $n$  jednej lub wielu zmiennych ( $n \geq 0$ ). Równanie algebraiczne jednej zmiennej ma postać:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

gdzie:

$n$  jest liczbą całkowitą nieujemną,

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  są tzw. współczynnikami równania,

$x$  jest niewiadomą, która jest poszukiwanym rozwiązaniem równania.

## Przykłady równań

liniowych:

$$x - y + 5 = 4$$

$$4x + 2y - z = x - 2$$

$$3x + 2y - z + 1 = 2x = z$$

nieliniowych:

$$3^x - 2x = 4$$

$$x^3 - x - 3 = 2x$$

$$\sin x - 3x + 2 = 1$$

$$2x - 4y^3 + 1 = z$$

# ROZWIĄZYWANIE UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH

## - podstawowe definicje, c.d.

**Układ równań** – koniunkcja pewnej liczby równań.

**Układ równań liniowych** – koniunkcja pewnej liczby równań liniowych, czyli równań pierwszego rzędu.

Podstawową metodą rozwiązywania układów równań jest przekształcanie danego układu w inny, który ma ten sam zbiór rozwiązań – układy takie nazywa się **równoważnymi**.

Operacje przekształcające dany układ w układ do niego równoważny:

- dodanie do równania innego równania pomnożonego przez liczbę,
- zamiana dwóch równań miejscami,
- pomnożenie równania przez liczbę różną od zera.

Metody rozwiązywania układów równań liniowych za pomocą wspomnianych operacji elementarnych są:

- *metoda eliminacji Gaussa*, w której układ przekształca się do równoważnego z nim układu równań z rosnącą liczbą zmiennych;
- *metoda eliminacji Gaussa-Jordana*, w której układ przekształca się dalej (poprzez kolejne podstawienia równań z mniejszą liczbą zmiennych do tych z większą) do równoważnego z nim układu równań liniowych wiążących bezpośrednio każdą zmienną z pewną wartością.

# ROZWIĄZYWANIE UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH

## - podstawowe definicje, c.d.

Układy trzech, czy nawet czterech zmiennych łatwo rozwiązać ręcznie (najlepiej metodą Gaussa); do większych stosuje się często komputery. Standardowe podejście opiera się na metodzie eliminacji Gaussa. Bardzo ważne jest unikanie dzielenia przez małe liczby, które może prowadzić do błędów zaokrągleń – można to osiągnąć poprzez zmianę kolejności równań.

# APROKSYMACJA

**Aproksymacja** – proces określania rozwiązań przybliżonych na podstawie rozwiązań znanych, które są bliskie rozwiązaniom. Zazwyczaj aproksymuje się złożone funkcje, funkcjami prostszymi.

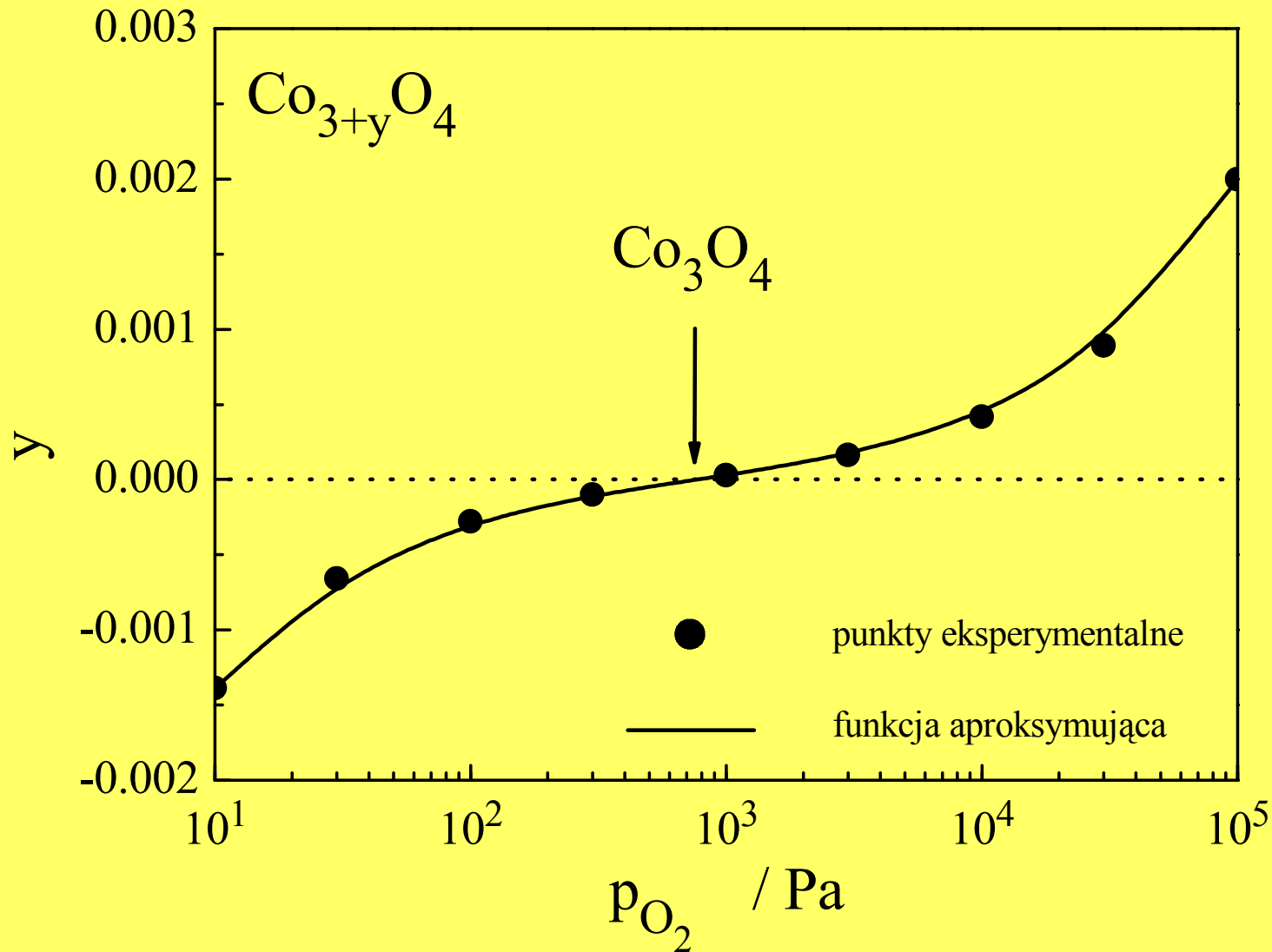
Aproksymacje można wykorzystać w sytuacji, gdy nie istnieje funkcja analityczna pozwalająca na wyznaczenie wartości dla dowolnego z jej argumentów, a jednocześnie wartości tej nieznannej funkcji są dla pewnego zbioru jej argumentów znane, ale obarczone pewnym błędem. Mogą to być na przykład wyniki badań eksperymentalnych.

Od funkcji aproksymującej, przybliżającej zadaną funkcję nie wymaga się, aby przechodziła ona przez jakieś konkretne punkty, tak jak to ma miejsce w interpolacji. Aproksymacja funkcji powoduje pojawienie się błędów, zwanych błędami aproksymacji.

Dużą zaletą aproksymacji w stosunku do interpolacji jest to, że aby dobrze przybliżyć, funkcja aproksymująca nie musi być wielomianem. Przybliżenie w tym wypadku rozumiane jest jako minimalizacja pewnej funkcji błędu. Bardzo popularną miarą tego błędu jest średni błąd kwadratowy, ale możliwe są również inne funkcje błędu, np. błąd średni.



# APROKSYMACJA



# APROKSYMACJA

Przykłady metod aproksymacyjnych:

- aproxymacja średniokwadratowa
- aproxymacja jednostajna
- aproxymacja liniowa

Funkcja aproksymująca może być przedstawiona w różnej postaci, np.:

- wielomianu (tzw. aproxymacja wielomianowa),
- funkcji sklepanych,
- funkcji matematycznych uzyskanych na drodze statystyki matematycznej (przede wszystkim regresji),
- sztucznych sieci neuronowych

## UWAGA:

Funkcje aproksymujące w postaci wielomianu i funkcji sklepanych można wykorzystać jedynie wtedy, gdy funkcja aproksymowana jest w postaci jednej zmiennej.

# APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA

Jest to aproksymacja, której celem jest minimalizacja błędu w przedziale  $[a, b]$ . Istotność błędu w poszczególnych punktach mierzy się za pomocą funkcji wagowej  $w(x)$ . Jeśli funkcję  $f(x)$  przybliża się za pomocą  $g(x)$ , to minimalizuje się błąd  $E$ :

$$E = \int_a^b w(x)(g(x) - f(x))^2 dx$$

Metodami tego rodzaju aproksymacji są:

- aproksymacja wielomianowa
- aproksymacja za pomocą wielomianów ortogonalnych
- aproksymacja trygonometryczna
- szybka transformacja Fouriera
- aproksymacja za pomocą funkcji sklepanych

# APROKSYMACJA JEDNOSTAJNA

Rodzaj aproksymacji, której celem jest minimalizacja największego błędu. Jeśli funkcja  $g(x)$  ma przybliżać jednostajnie funkcję  $f(x)$  w przedziale  $[a, b]$ , wówczas minimalizowany jest maksymalny błąd  $E$ :

$$E = \max_{x \in [a, b]} |g(x) - f(x)|$$

W porównaniu do aproksymacji średniokwadratowej, aproksymacja jednostajna analizuje duże błędy i w ogóle nie zajmuje się jakością przybliżenia w innych punktach. Z tego powodu jest rzadziej używana w praktyce.

# APROKSYMACJA LINIOWA

Rodzaj aproksymacji, w której funkcją bazową jest funkcja liniowa

# INTERPOLACJA

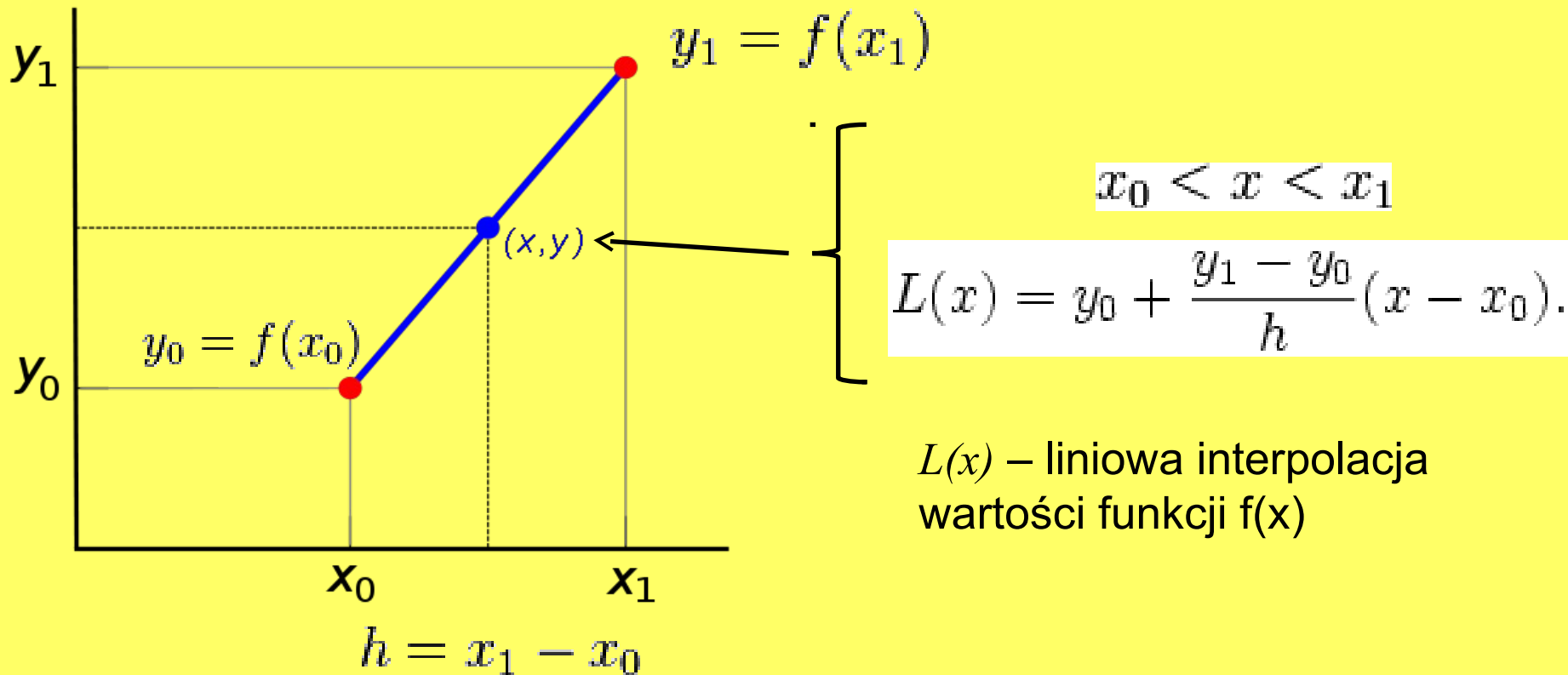
Jest to metoda numeryczna polegająca na wyznaczeniu w danym przedziale tzw. *funkcji interpolacyjnej*, która przyjmuje w nim z góry zadane wartości w ustalonych punktach, nazywanych węzłami (węzeł funkcji to argument funkcji, dla którego znana jest jej wartość). Interpolacja stosowana jest m.in. w naukach doświadczalnych, gdzie dysponuje się zazwyczaj skończoną liczbą danych, do określenia zależności między wielkościami oraz w celu uproszczenia skomplikowanych funkcji, np. podczas całkowania numerycznego. Interpolacja jest szczególnym przypadkiem aproksymacji.

Rodzaje interpolacji:

- interpolacja wielomianowa
- interpolacja funkcjami sklejanymi
- interpolacja trygonometryczna

# INTERPOLACJA WIELOMIANOWA

Interpolacja wielomianowa polega na przybliżaniu funkcji za pomocą wielomianów. Zwykle zakłada się o funkcji interpolowanej, że jest ciągła, choć często dodaje się warunki różniczkowalności, które umożliwiają dokładniejsze oszacowania błędów przybliżeń. Najprostszym przypadkiem interpolacji wielomianowej jest interpolacja liniowa, dokonywana przy użyciu funkcji liniowej (analizowane są dwa węzły).



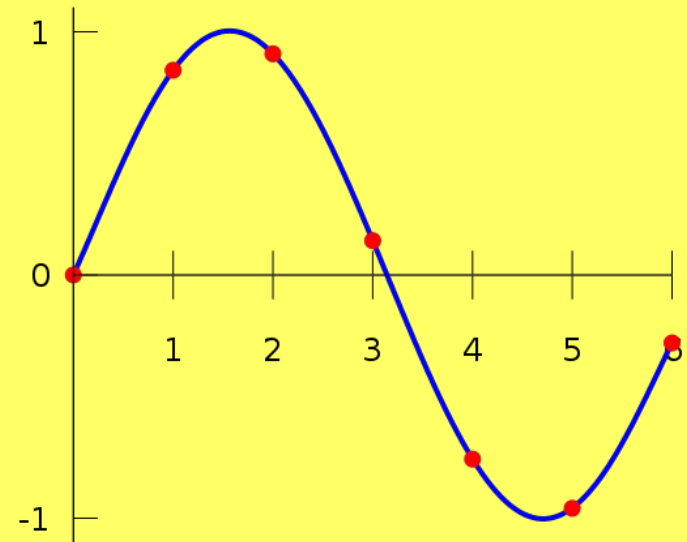
# INTERPOLACJA WIELOMIANOWA

**Metoda interpolacji wielomianowej** polega na wybraniu  $n+1$  węzłów spośród analizowanych punktów i znalezieniu wielomianu  $W(x)$  co najwyżej  $n$ -tego stopnia, przyjmującego wartości zadane w węzłach.

## Znajdowanie odpowiedniego wielomianu

Wielomian przyjmujący zadane wartości w konkretnych punktach można znaleźć w następujący sposób:

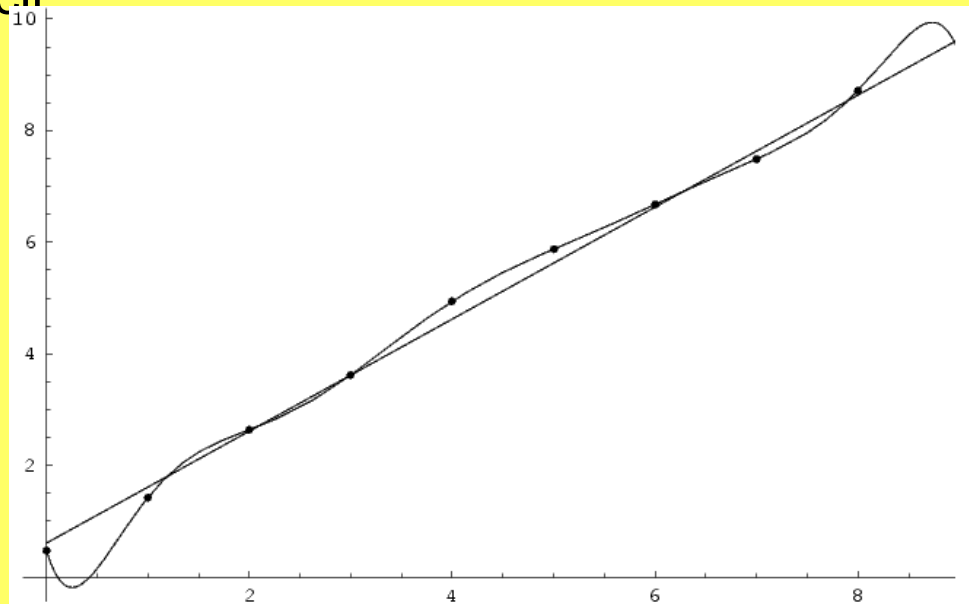
- dla pierwszego węzła o wartości  $f(x_0)$  znajduje się wielomian, który w punkcie  $x_0$  przyjmuje wartość  $f(x_0)$ , a w pozostałych węzłach wartość zero.
- dla każdego kolejnego węzła o wartości  $f(x_i)$  znajduje się podobny wielomian, który w punkcie  $x_i$  przyjmuje wartość  $f(x_i)$ , natomiast we wszystkich pozostałych węzłach wartość zero.
- następnie należy zsumować wszystkie wielomiany, gdyż wielomian będący sumą wielomianów obliczonych dla poszczególnych węzłów jest wielomianem interpolującym .





# BŁĄD INTERPOLACJI WIELOMIANOWEJ

Błąd interpolacji można zmniejszać poprzez zwiększanie liczby węzłów. Początkowo ze wzrostem liczby węzłów  $n$  przybliżenie poprawia się, jednak po dalszym wzroście  $n$  zaczyna się pogarszać, co jest szczególnie widoczne na końcach przedziałów (**efekt Rungego**). Takie zachowanie się wielomianu interpolującego jest zjawiskiem typowym dla interpolacji za pomocą wielomianów wysokich stopni przy stałych odległościach węzłów. Występuje ono również jeśli interpolowana funkcja jest nieciągła, albo odbiega znacząco od funkcji gładkiej. Aby uniknąć tego efektu, można zastosować interpolację z węzłami coraz gęściej upakowanymi na krańcach przedziału interpolacji



# INTERPOLACJA FUNKCJAMI SKLEJANYMI

**Interpolacja funkcjami sklejanymi** – metoda polega na przybliżaniu nieznanej funkcji wielomianami niskiego stopnia. W tym celu dany przedział  $[a, b]$  zawierający wszystkie węzły interpolacji dzieli się na określoną liczbę mniejszych przedziałów i w każdym z nich interpoluje się funkcję wielomianem (z reguły niskiego stopnia). "Sklejenie" tych wielomianów ma tworzyć funkcję sklejaną.

# INTERPOLACJA TRYGONOMETRYCZNA

Stosowana jest do przybliżania funkcji okresowych. Wielomiany z powodu braku okresowości powodują duże błędy podczas przybliżeń funkcji okresowych, w konsekwencji zamiast nich używa się funkcji trygonometrycznych mających charakter okresowy.

# NUMERYCZNE OBLICZANIE POCHODNYCH

**Pochodna** – miara szybkości zmian wartości funkcji względem zmian jej argumentów.

**Pochodną funkcji**  $f(x)$  w punkcie nazywamy granicę (o ile istnieje):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

# POCHODNA NUMERYCZNA

Szereg Taylora:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \times f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \times f''(x_i) + \dots$$

Iloraz różnicowy przedni (progresywny),  
w punkcie  $x_{i+1}$ :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

Iloraz różnicowy wsteczny (regresywny),  
w punkcie  $x_{i-1}$ :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

# POCHODNA CENTRALNA

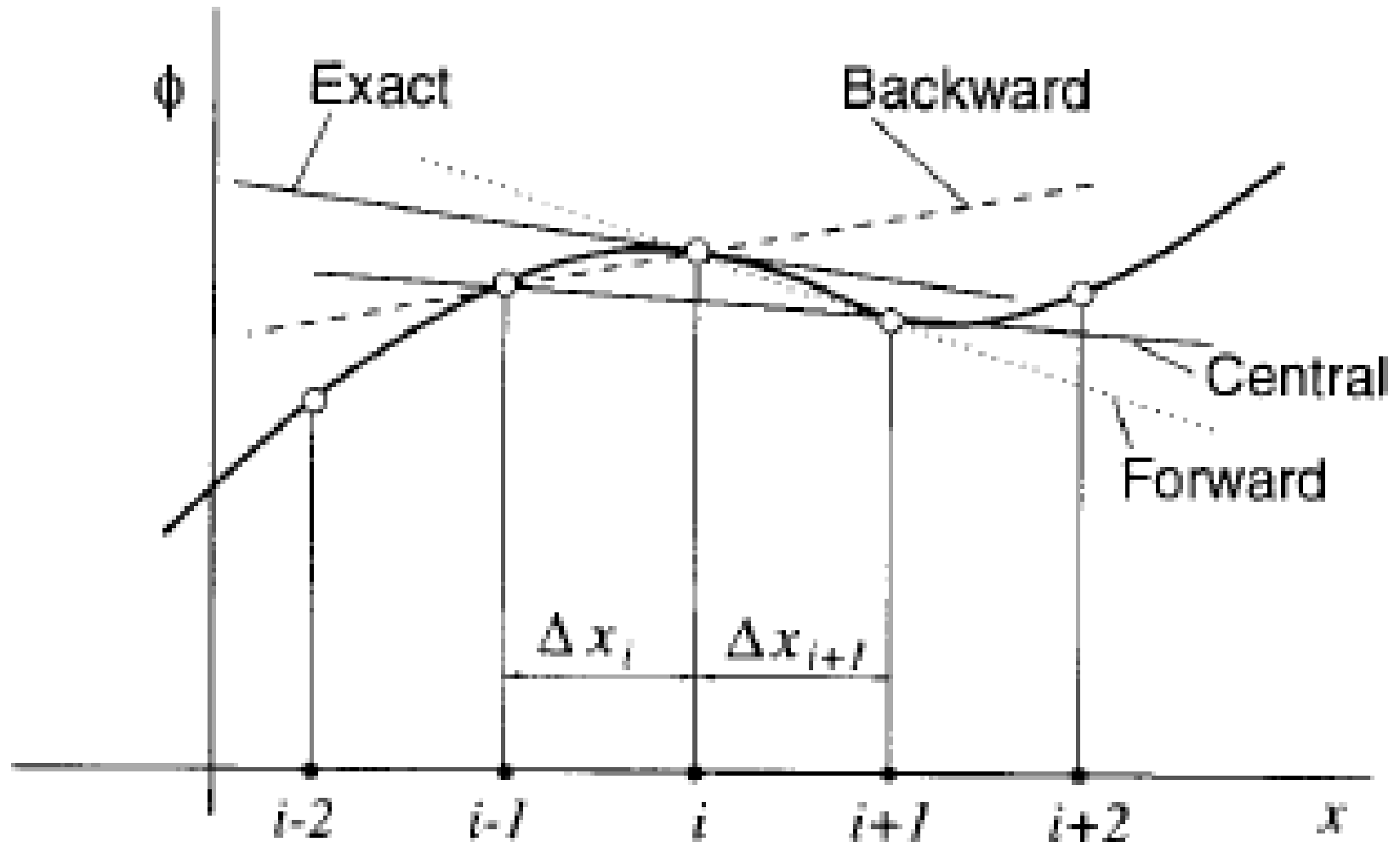
Iloraz różnicowy **centralny**:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

$$+ f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

# PORÓWNANIE POCHODNYCH



# DRUGA POCHODNA

**Druga różniczka** w punkcie  $x_i$ :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i) \times f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \times f''(x_i) + \dots$$

**Druga różniczka** w punkcie  $x_{i-1}$ :

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + (x_{i-1} - x_i) \times f'(x_i) + \frac{(x_{i-1} - x_i)^2}{2!} \times f''(x_i) + \dots$$

Zakładając, że  $(x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i) = h$  oraz dodając:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}) - 2f(x_i)}{h^2}$$



# CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

Polega na przybliżonym obliczaniu całek oznaczonych. Proste metody całkowania numerycznego polegają na przybliżeniu całki za pomocą odpowiedniej sumy ważonej wartości całkowanej funkcji w kilku punktach. Aby uzyskać dokładniejsze przybliżenie dzieli się przedział całkowania na niewielkie fragmenty. Ostateczny wynik jest sumą oszacowań całek w poszczególnych podprzedziałach. Najczęściej przedział dzieli się na równe podprzedziały, ale bardziej wyszukane algorytmy potrafią dostosowywać krok do szybkości zmienności funkcji.

## Metody całkowania numerycznego:

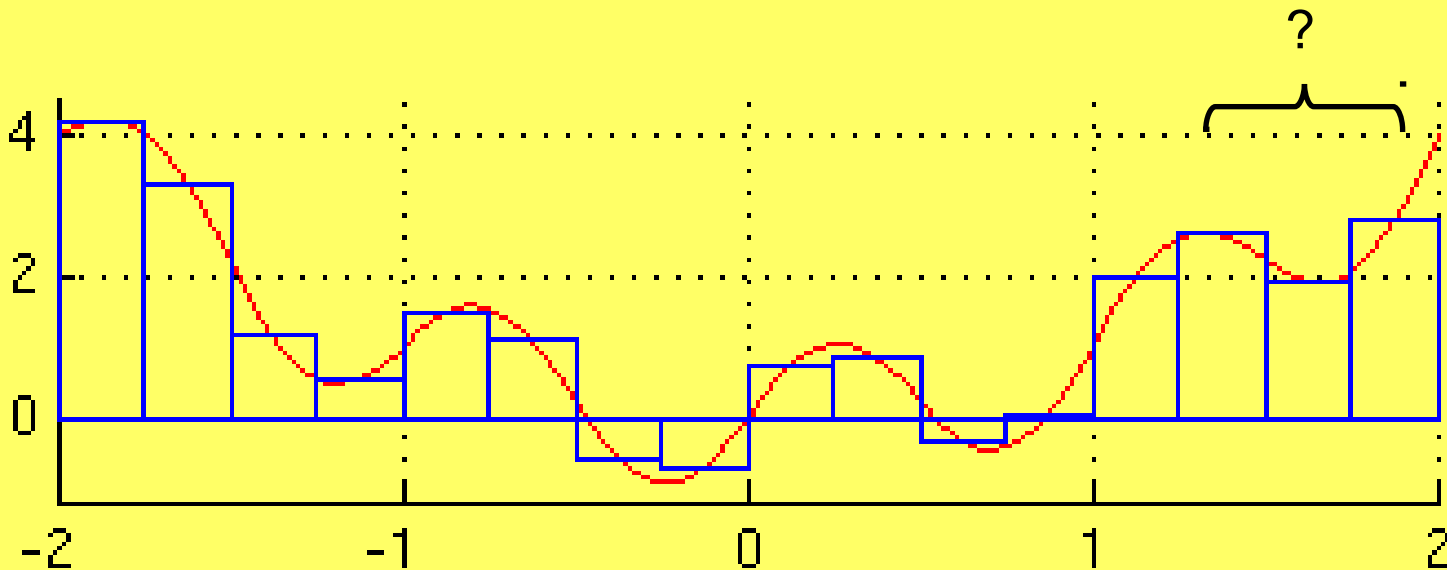
- metoda prostokątów
- metoda trapezów
- metoda parabol (Simpsona)

# CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

## - metoda prostokątów

Jeśli funkcja  $f(x)$  zmienia się w niewielkim stopniu w przedziale  $(x_*, x_* + h)$  to całkę w tym przedziale dobrze przybliży prostokąt o polu danym wyrażeniem:

$$\int_{x_*}^{x_*+h} f(x) dx \approx hf \left( x_* + \frac{h}{2} \right)$$



# CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

## - metoda trapezów

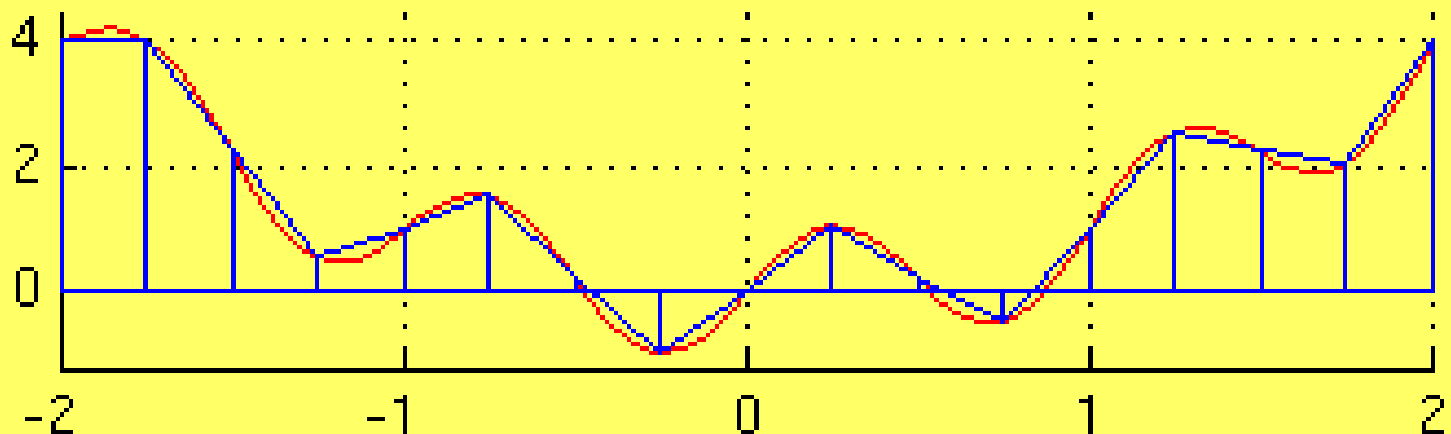
Krzywa będąca wykresem danej funkcji jest aproksymowana trapezami wpisanymi w tą krzywą. Podstawy trapezów (tj. przedziały całkowania) mają takie same długości.

Pole figury złożonej z trapezów wynosi

$$S_n = \frac{y_1 + y_2}{2}h + \frac{y_2 + y_3}{2}h + \dots + \frac{y_n + y_{n+1}}{2}h = h \left( \frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \frac{y_{n+1}}{2} \right)$$

A zatem przybliżoną wartość całki można obliczyć z zależności:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left( \frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \frac{y_{n+1}}{2} \right) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f(x_i) + f(x_{i+1}))$$



# CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

## - metoda parabol (Simpsona)

Metoda opiera się na przybliżaniu funkcji całkowanej przez interpolację wielomianem drugiego stopnia. W tym celu należy podzielić przedział całkowania  $[a, b]$  na parzystą liczbę jednakowej długości ( $h$ ) podprzedziałów, dla których węzły interpolacyjne można zapisać jako:

$$x_i = a + ih$$

$$f_i = f(x_i)$$

Następnie należy dokonać całkowanie wielomianu interpolacyjnego z 3 kolejnych punktów otrzymujemy wzór Simpsona:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}]$$

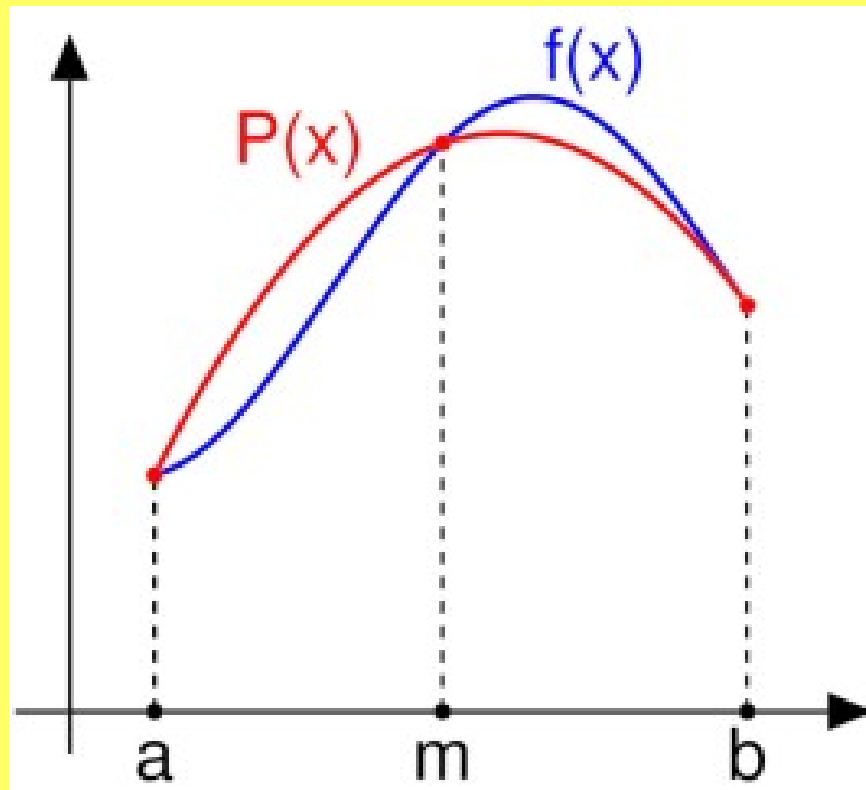
Z kolei, dla całego przedziału  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2}) + f_{2n}]$$

# CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

## - metoda parabol (Simpsona)

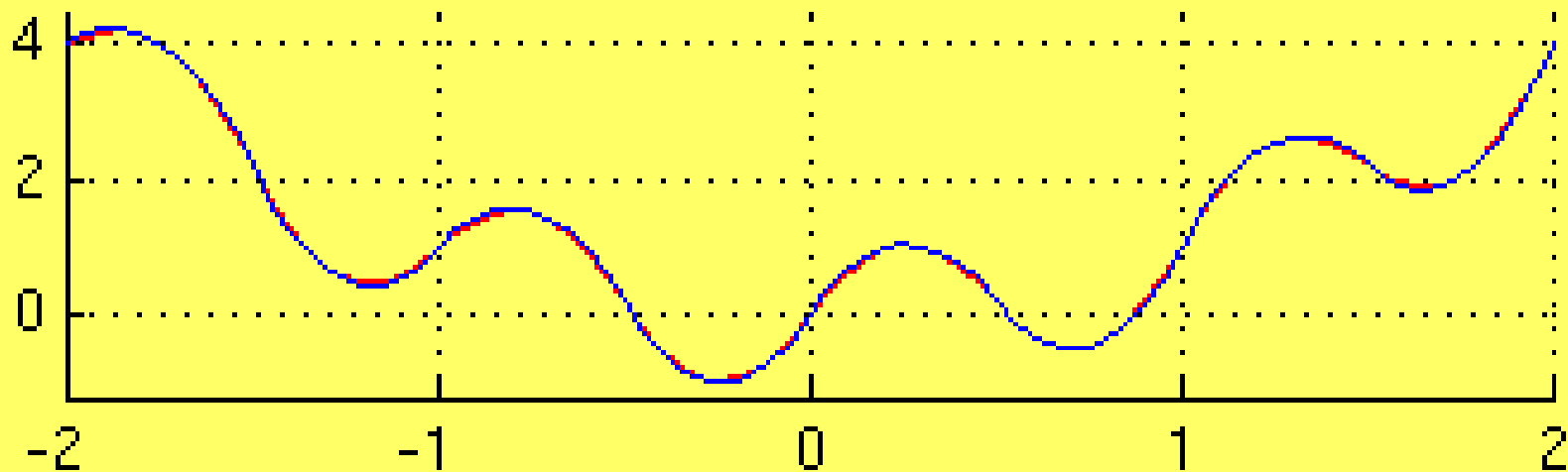
Metoda ta sprowadza się do zastąpienia w każdym kolejnym przedziale wykresu funkcji  $y=f(x)$  łukiem paraboli, przeprowadzonej przez trzy kolejne węzły interpolacji, odpowiadające początkowi, środkowi i końcowi danego przedziału.



# CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

## - metoda parabol (Simpsona)

Metoda ta sprowadza się do zastąpienia w każdym kolejnym przedziale wykresu funkcji  $y=f(x)$  łukiem paraboli, przeprowadzonej przez trzy kolejne węzły interpolacji, odpowiadające początkowi, środkowi i końcowi danego przedziału.



**KONIEC**