METODY INŻYNIERII WIEDZY

SYSTEMY ROZMYTE i rozmyte wnioskowanie

Adrian Horzyk

Akademia Górniczo-Hutnicza

Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Inżynierii Biomedycznej

Katedra Automatyki i Inżynierii Biomedycznej

Laboratorium Biocybernetyki

30-059 Kraków, al. Mickiewicza 30, paw. C3/205

horzyk@agh.edu.pl, Google: Adrian Horzyk

SYSTEMY ROZMYTE
Fuzzy Systems

Wartości rozmyte są naturalnym sposobem określania pewnych cech przez ludzi w środowisku niepewnym, nieprecyzyjnym, losowym lub na podstawie niekompletnych informacji:

- bardzo mały, mały, średni, duży, bardzo duży, ogromny, wysoki, niski,
- dobre, niedobre, przeciętne,
- słabe, silne, umiarkowane,
- ładne, brzydkie, gustowne, luksusowe,
- zimne, chłodne, letnie, ciepłe, gorące,
- stare, młode, współczesne,
- niedawno, wcześnie, późno, w przyszłości.

W przypadku próby algorytmizacji działań opartych o wartości rozmyte natrafiamy na oczywistą trudność w zakodowaniu takich wartości rozmytych, którym trudno przypisać jedną określoną dokładną wartość!

SYSTEMY ROZMYTE

Umożliwiają:

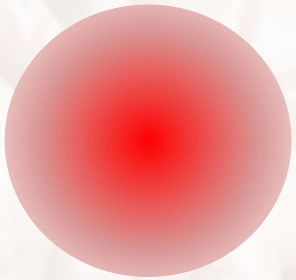
- ✓ reprezentację wartości rozmytych
- ✓ dokonywanie operacji na wartościach rozmytych
- ✓ opisywanie i operowanie na wartościach nieprecyzyjnych, nieostrych lub wieloznacznych
- ✓ wykorzystanie danych symbolicznych do wnioskowania
- ✓ przypisywanie elementom lingwistycznym wartości i zmiennych numerycznych
- ✓ rozmywanie i wyostrzanie wartości
- ✓ tworzenie reguł rozmytych
- ✓ tworzenie i uczenie systemów decyzyjnych i klasyfikujących na podstawie wartości rozmytych

ZBIORY ROZMYTE

Zbiór rozmyty definiujemy jako zbiór elementów, na których zdefiniowana jest funkcja przynależności $\mu_A(x)$ elementu do zbioru:

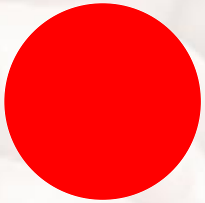
$$A = \{ (x, \mu_A(x)): x \in X\}$$

ROZMYTE



$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$

OSTRE



$\mu_S(x): X \rightarrow \{0,1\}$

Korzystamy z **logiki wielowartościowej** jako aparatu matematycznego do opisu operacji dla zbiorów rozmytych.

Stosujemy **rozmyte reguły decyzyjne** operujące na takich zbiorach.

Wielkościom lingwistycznym (symbolicznym) przypisujemy określone zmienne numeryczne, dla których można wyznaczyć funkcje opisujące zakres zmienności parametrów z nimi związanych.

NOTACJA WG ZADEHA

X jest przestrzenią o skończonej liczbie elementów, X = {x_1, ..., x_n}:

$$\mathrm{A} = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$$

X = N jest zbiorem liczb naturalnych. Określamy pojęcie zbioru liczb naturalnych „bliskich liczbie 7” definiując zbiór rozmyty A ⊆ X:

$$\mathrm{A} = \frac{0{,}2}{4} + \frac{0{,}5}{5} + \frac{0{,}8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0{,}8}{8} + \frac{0{,}5}{9} + \frac{0{,}2}{10}$$

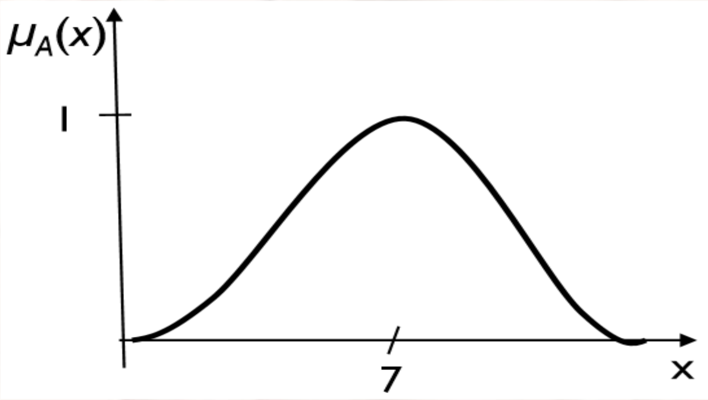
NOTACJA WG ZADEHA

X jest przestrzenią o nieskończonej liczbie elementów:

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x}$$

X = R jest zbiorem liczb rzeczywistych. Określamy pojęcie zbioru liczb rzeczywistych „bliskich liczbie 7” definiując funkcję przynależności:

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+(x-7)^2}$$

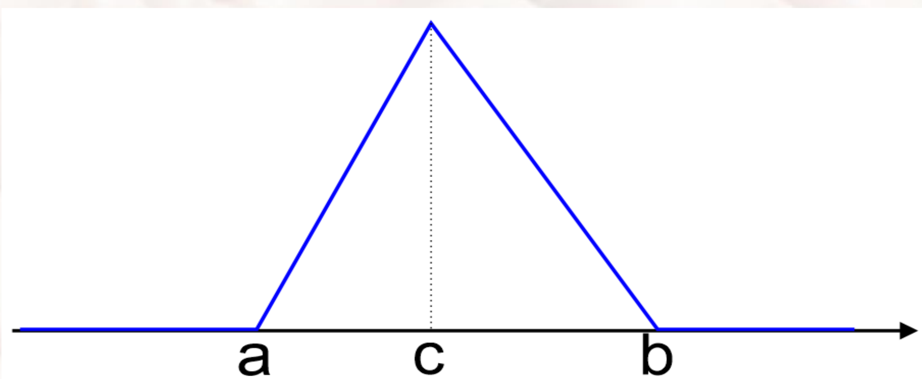


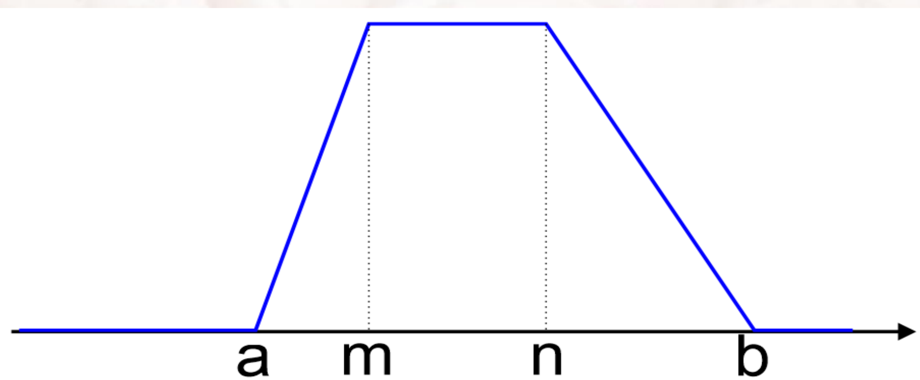
FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI

Funkcja przynależności $\mu_A(x)$ definiuje stopień przynależności elementu do zbioru rozmytego. Do najczęściej stosowanych funkcji przynależności należą: funkcja trójkątna i funkcja trapezoidalna:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{c-a} & \text{if } x \in [a, c] \\ \frac{b-x}{b-c} & \text{if } x \in [c, b] \\ 0 & \text{if } x > b \end{cases}$$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{if } x \in [a, m] \\ 1 & \text{if } x \in [m, n] \\ \frac{b-x}{b-n} & \text{if } x \in [n, b] \\ 0 & \text{if } x > b \end{cases}$$





ZBIORY ROZMYTE

Zbiór rozmyty nie określa ostrej granicy między elementami, które do danego zbioru należą, a tymi, które do niego nie należą.

Granica taka jest rozmyta i zawiera wiele wartości, stopniując przynależność elementu do zbioru jako liczbę z zakresu [0,1].

Zmiennej u można przyporządkować określony stopień przynależności [0,1] do zbioru rozmytego F na podstawie pewnej funkcji przynależności:

$\mu F(u) = 0$ - oznacza brak przynależności u do zbioru F

$\mu F(u) = 1$ - oznacza pełną przynależność u do zbioru F

$\mu F(u) \in (0,1)$ - oznacza częściową przynależność u do zbioru F

DEFINICJE

Zbiór elementów przestrzeni X, dla których $\mu_A(x) > 0$ nazywamy nośnikiem zbioru rozmytego A i oznaczamy supp A (ang. support):

$$\mathrm{supp}\ \mathrm{A} = \{x \in \mathbf{X};\, \mu_A(x) > 0\}$$

Wysokość zbioru rozmytego A oznaczamy h(A) i definiujemy jako :

$$h(\mathrm{A}) = \sup_{x \in A} \mu_A(x)$$

DEFINICJE

Zbiór rozmyty A nazywamy normalnym wtedy i tylko wtedy, gdy h(A) = 1.

Jeżeli zbiór rozmyty A nie jest normalny, to można go znormalizować za pomocą przekształcenia:

$$\mu_{A_N}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(\mathrm{A})} \qquad \underset{x \in \mathrm{X}}{\forall}$$

DEFINICJE

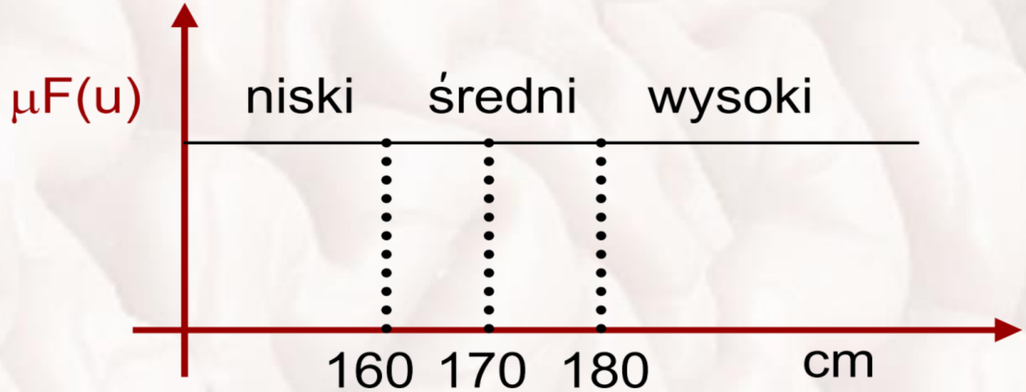
Zbiór rozmyty A jest pusty,
co zapisujemy $A = \emptyset$,
wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_A(x) = 0$ dla każdego $x \in X$.

Zbiór rozmyty A zawiera się w zbiorze rozmytym B,
co zapisujemy $A \subset B$,
wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ dla każdego $x \in X$.

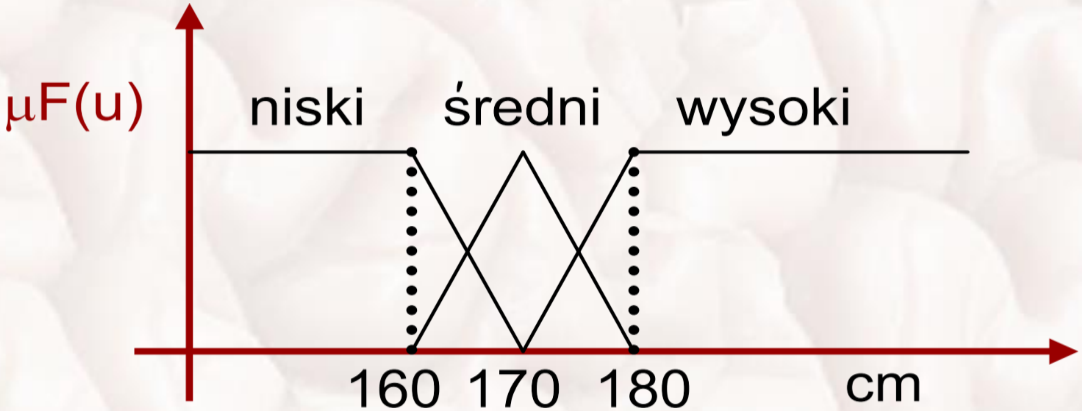
Zbiór rozmyty A jest równy zbiorowi rozmytemu B,
co zapisujemy $A = B$,
wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ dla każdego $x \in X$.

ALGEBRA ROZMYTA

Algebra Boole'a jednoznacznie przyporządkowuje dane do zbioru, określając przynależność jako jedną wartość ze zbioru {0,1}:



Algebra rozmyta przyporządkowuje różne wartości z zakresu [0,1] do określenia przynależności danej do zbioru:



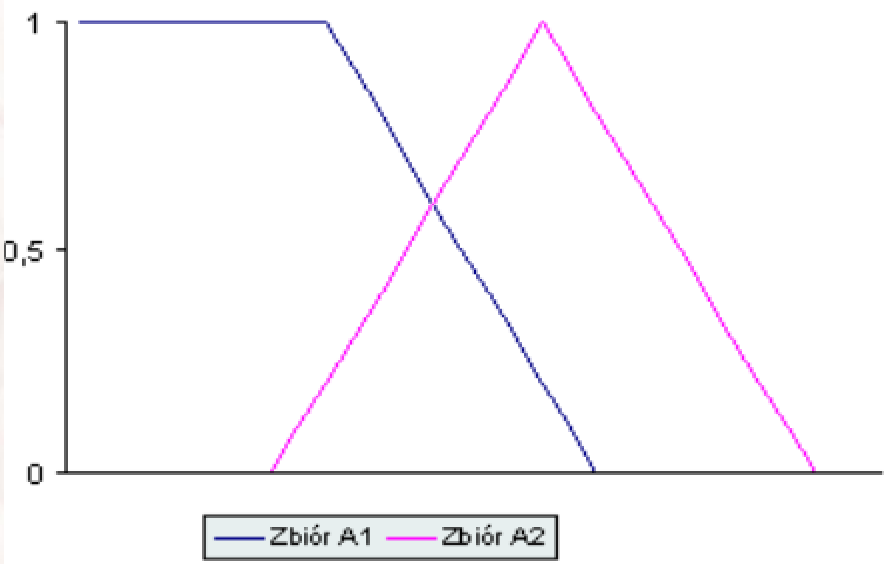
OPERATORY ROZMYTE

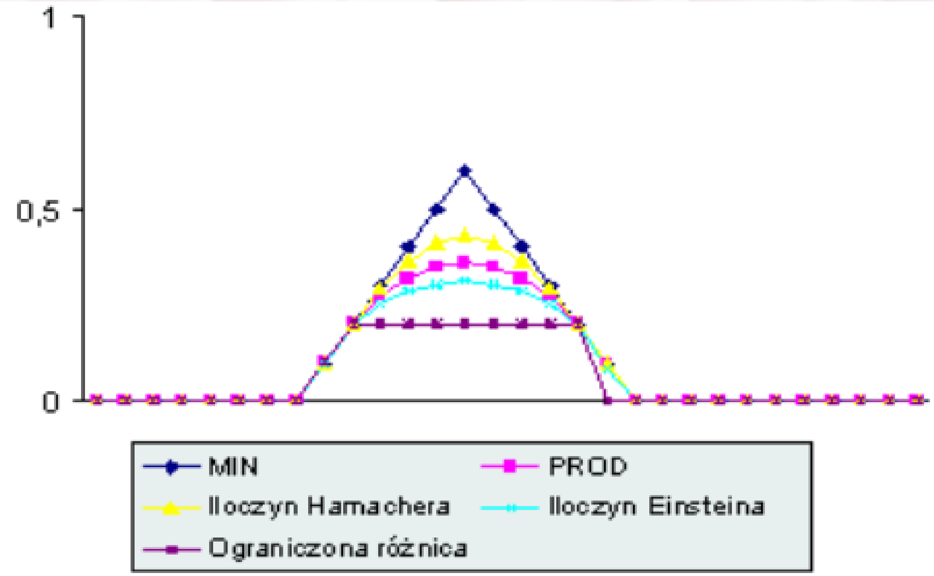
W logice rozmytej stosuje się operatory rozmyte:

- **przecięcia (MIN) nazywane T-normą,**
- **sumy (MAX) zwane S-normą.**

AND T-Norm $T(\mu_A(x), \mu_B(x))$	OR S-Norm $S(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Minimum $\mathrm{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$	Maximum $\mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$
Algebraic product $\mu_A(x)\mu_B(x)$	Algebraic sum $\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$
Drastic product $\mathrm{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ if $\mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 1$ 0 otherwise	Drastic sum $\mathrm{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ if $\mathrm{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 0$ 1 otherwise
Lukasiewicz AND (Bounded Difference) $\mathrm{MAX}(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$	Lukasiewicz OR (Bounded Sum) $\mathrm{MIN}(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$
Einstein product $\mu_A(x)\mu_B(x)/(2 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)))$	Einstein sum $(\mu_A(x) + \mu_B(x))/(1 + \mu_A(x)\mu_B(x))$
Hamacher product $\mu_A(x)\mu_B(x)/(\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x))$	Hamacher sum $(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x)\mu_B(x))/(1 - \mu_A(x)\mu_B(x))$
Yager operator $1 - \mathrm{MIN}(1, ((1 - \mu_A(x))^b + (1 - \mu_B(x)^b)^{1/b}))$	Yager operator $\mathrm{MIN}(1, (\mu_A(x)^b + \mu_B(x)^b)^{1/b})$

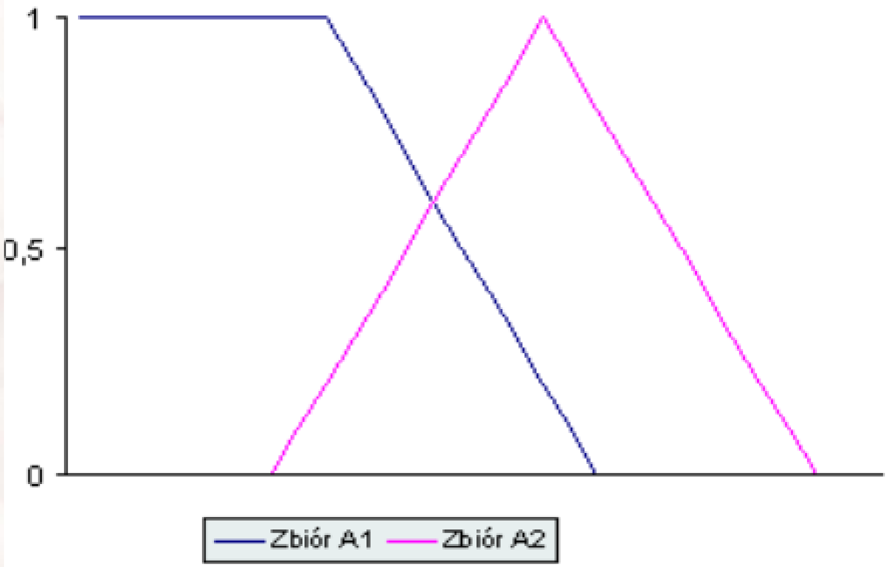
OPERACJE NA ZBIORACH ROZMYTYCH T-NORMY

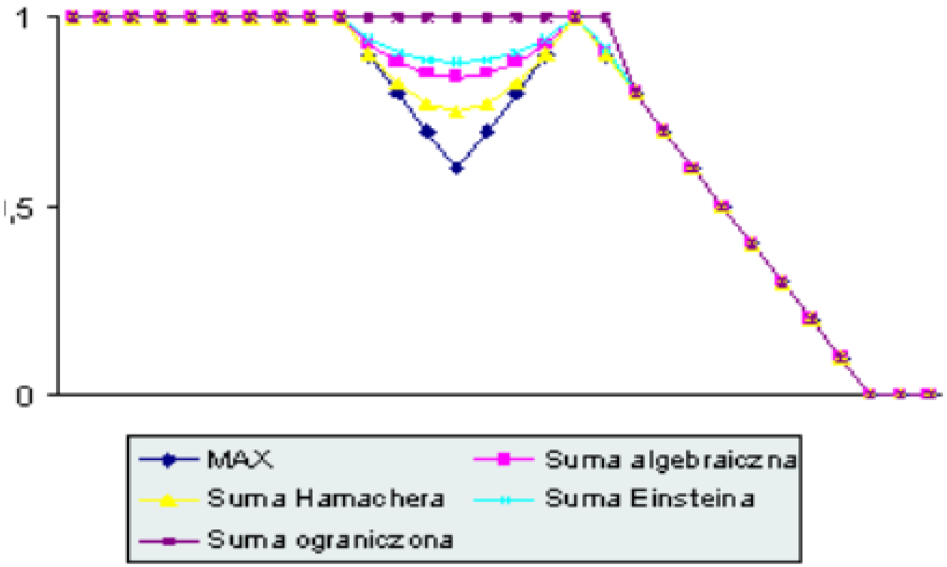




Nazwa operatora	Wzór
minimum (*MIN*)	$\mu_{A\cap B}(x)=MIN(\mu_A(x),\mu_B(x))$
iloczyn (*PROD*)	$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$
iloczyn Hamachera (Hamacher product)	$\mu_{A\cap B}(x)=\dfrac{\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}{\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}$
iloczyn Einsteina (Einstein *PROD*)	$\mu_{A\cap B}(x)=\dfrac{\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}{2-(\mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\cdot\mu_B(x))}$
iloczyn drastyczny (drastic *PROD*)	$\mu_{A\cap B}(x)=\begin{cases}MIN(\mu_A(x),\mu_B(x)) & \text{dla } MAX(\mu_A(x),\mu_B(x))=1\\ 0 & \text{poza tym}\end{cases}$
ograniczona różnica (bounded difference)	$\mu_{A\cap B}(x)=MAX(0,\mu_A(x)+\mu_B(x)-1)$

OPERACJE NA ZBIORACH ROZMYTYCH S-NORMY





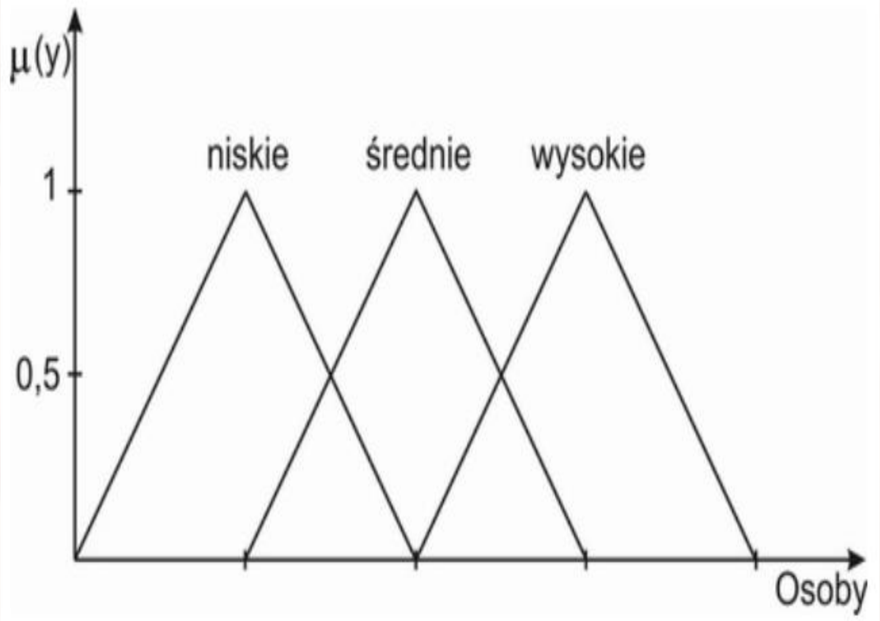
Nazwa operatora	Wzór
maksimum (*MAX*)	$\mu_{A\cup B}(x) = MAX\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right]$
suma algebr.	$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)$
suma Hamachera	$\mu_{A\cup B}(x) = \dfrac{\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}{1 - \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}$
suma Einsteina	$\mu_{A\cup B}(x) = \dfrac{\mu_A(x) + \mu_B(x)}{1 + \mu_A(x)\cdot\mu_B(x)}$
suma drastyczna	$\mu_{A\cup B}(x) = \begin{cases} MAX\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right] & \text{dla } MIN(\mu_A, \mu_B) = 0 \\ 1 & \text{poza tym} \end{cases}$
suma ograniczona	$\mu_{A\cup B}(x) = MIN\left[1, \mu_A(x) + \mu_B(x)\right]$

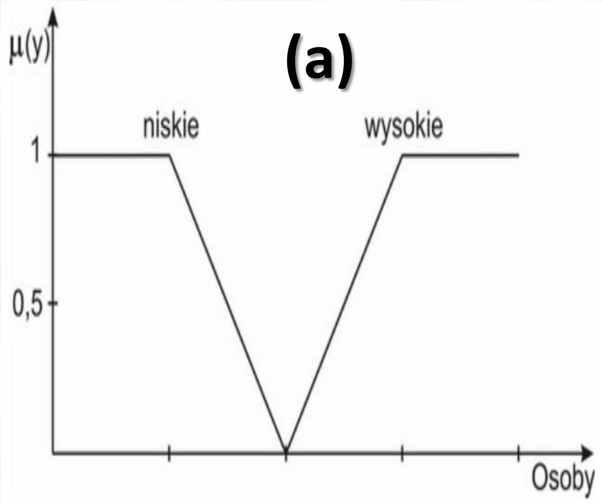
PRZYKŁAD DZIAŁANIA OPERATORÓW ROZMYTYCH: NOT, MAX, MIN

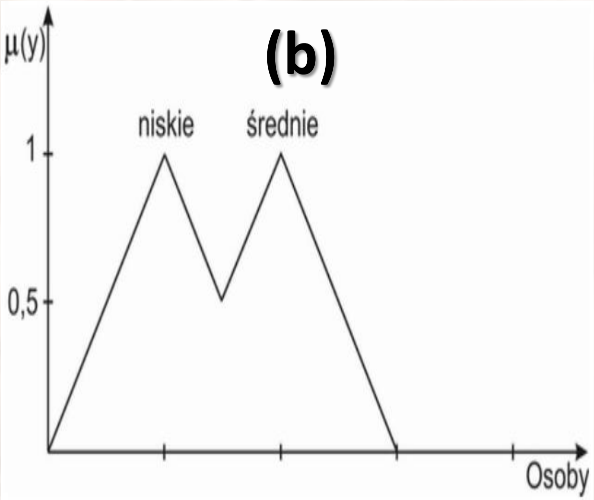
Załóżmy, że mamy określone trzy zbiory rozmyte opisujące wzrost osób: niskie, średnie i wysokie.

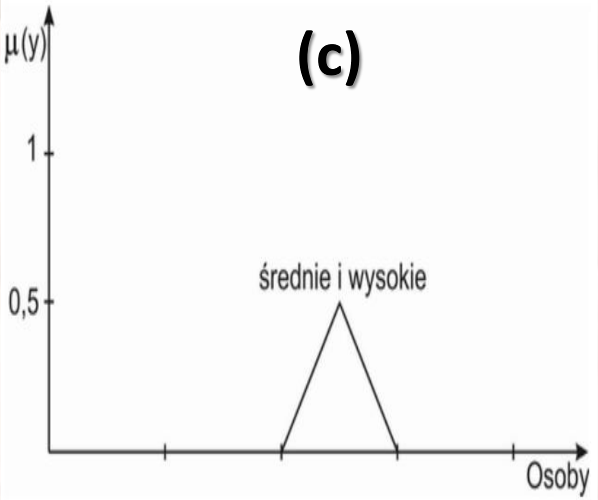
Chcemy wyznaczyć zbiory opisujące rozmyte zbiory osób:

a) Osób nie średnich
b) Osób niskich lub średnich
c) Osób średnich i wysokich









KLAROWNOŚĆ OPISU

W porównaniu do systemów neuronowych zbiory i reguły rozmyte charakteryzują się intuicyjną interpretacją i łatwością zrozumienia:

IF [przesłanka] THEN [konkluzja]

$$\text{IF } x \text{ is } A \text{ THEN } y \text{ is } B$$

$$\text{IF } x_1 \text{ is } A_1 \text{ AND } x_2 \text{ is } A_2 \text{ AND } \dots \text{ THEN } y \text{ is } B$$

$$\text{IF } x_1 \text{ is } A_1 \text{ OR } x_2 \text{ is } A_2 \text{ OR } \dots \text{ THEN } y \text{ is } B$$

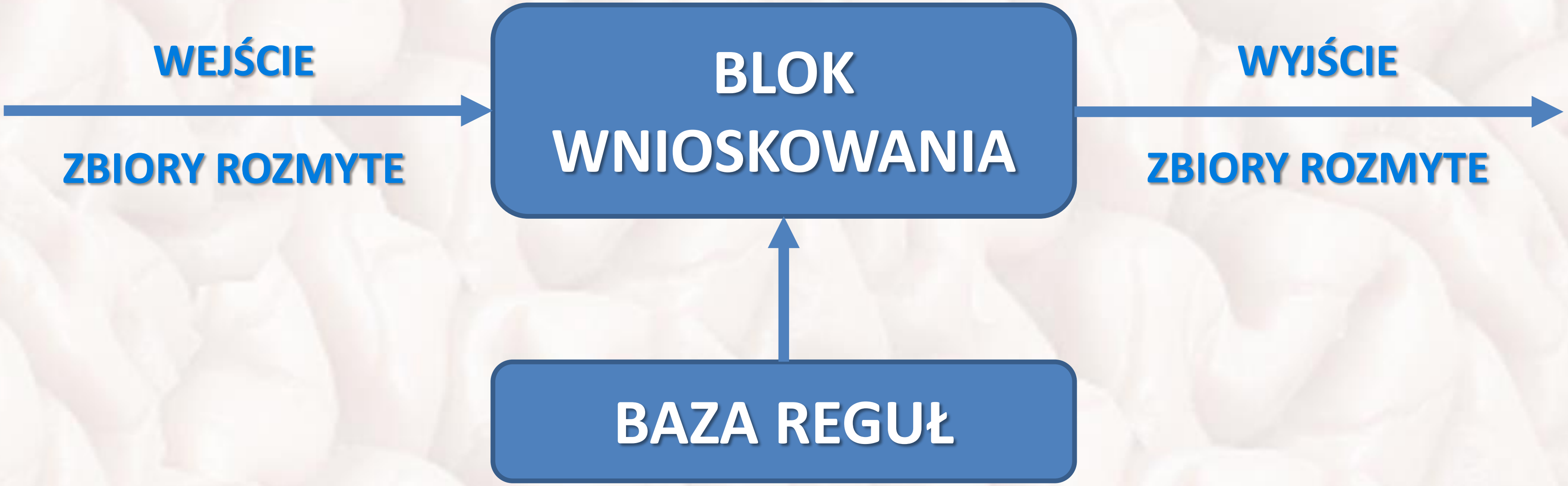
A, B to wartości lingwistyczne zdefiniowane jako zbiory rozmyte z uniwersum odpowiednio X i Y, x jest zmienną wejściową i y jest zmienną wyjściową.

Reguły rozmyte mogą być tworzone:

- **Przez eksperta, który zdefiniuje rozmyte reguły wnioskowania.**
- **Przez system uczący się, który na podstawie zbioru uczącego, dla którego określono przynależność wartości rozmytych do zbiorów rozmytych, określa reguły wnioskowania i funkcje przynależności.**

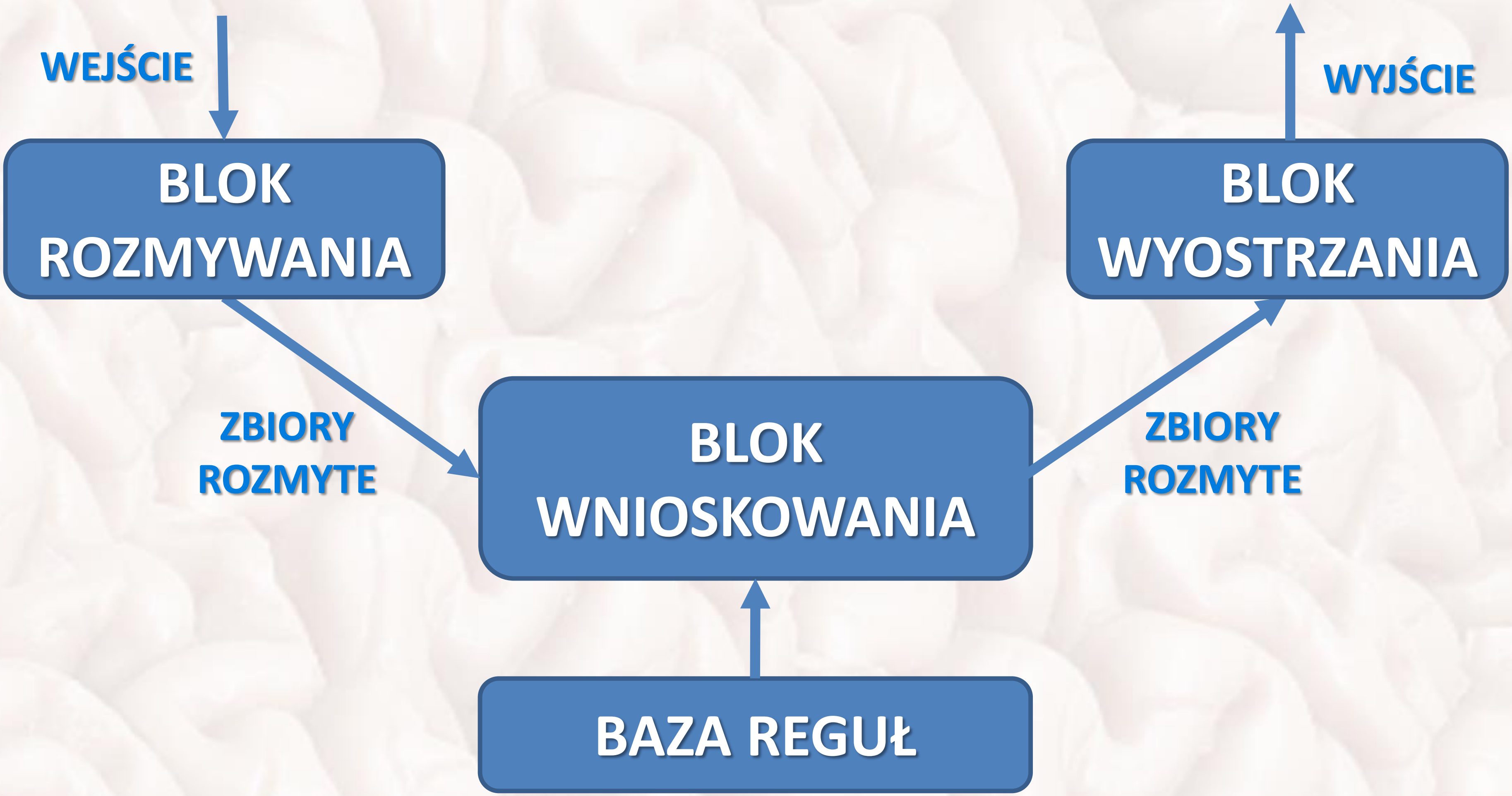
SYSTEMY ROZMYTE

Systemy rozmyte zawierają przynajmniej dwa podstawowe moduły: blok wnioskowania i bazę reguł.



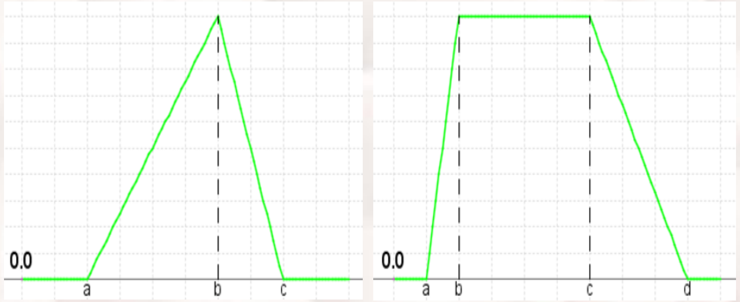
SYSTEMY ROZMYTE

Systemy rozmyte zawierają przynajmniej dwa podstawowe moduły: blok wnioskowania i bazę reguł.

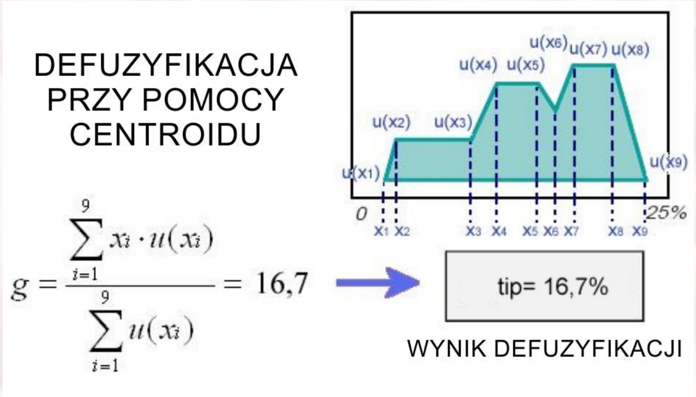


ROZMYWANIE I WYOSTRZANIE

Blok rozmywania (fuzyfikator) przekształca n-wymiarowy wektor wejściowy $x = [x_1, x_2, \ldots, x_N]$ w zbiór rozmyty F z określoną funkcją przynależności, których rolę najczęściej pełnią funkcje trójkątne, trapezoidalne oraz gaussowskie.



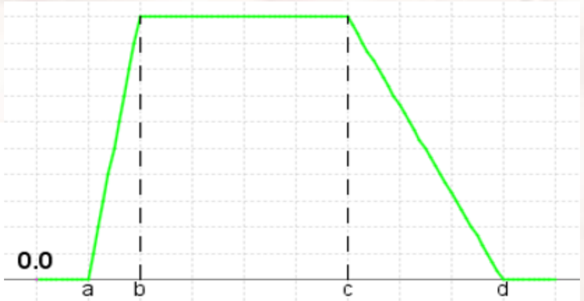
Blok wyostrzania (defuzyfikator) przekształca zbiór rozmyty na wartość y na podstawie środka ciężkości zbioru rozmytego lub średnich ważonych centrów uwzględniając kształt zbioru rozmytego.



Funkcje rozmyte mogą reprezentować i aproksymować dowolną funkcję ciągłą.

FUNKCJE PRZYNALEŻNOŚCI

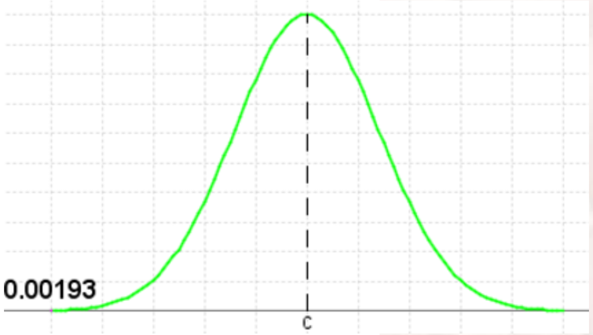
Funkcja trapezoidalna



$$trapez\,(x; a, b, c, d) = 0 \vee \left(1 \wedge \frac{x-a}{b-a} \wedge \frac{d-x}{d-c}\right), \qquad a < b \leqslant c < d, \quad x \in \mathbb{X}$$

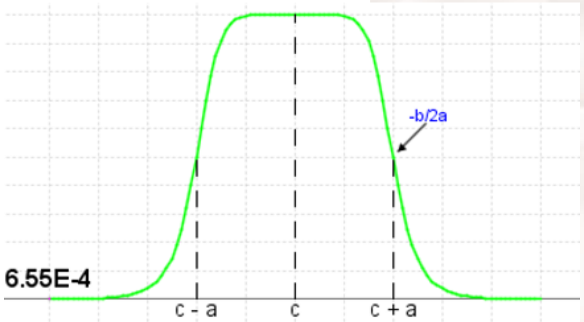
Funkcja Gaussa

$$gauss\,(x; a, b) = \exp\left[-\left(\frac{x-b}{a}\right)^2\right]$$



Funkcja dzwonowa

$$dzwon\,(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$



ROZMYTA BAZA WIEDZY

Reguły rozmyte tworzą swoistą **rozmytą bazę wiedzy**, która umożliwia wnioskowanie w ramach danego systemu.

System wykorzystujący taką rozmytą bazę reguł nazywamy **rozmytym systemem wnioskującym**.

Reguły wnioskowania mogą być wyznaczane automatycznie na podstawie zbioru uczącego oraz **metod adaptacyjnych**.

EWOLUCYJNE SYSTEMY NEURONOWO-ROZMYTE

Inteligentne systemy obliczeniowe obecnie często łączą zalety różnych systemów z zakresu inteligencji obliczeniowej:

- ✓ stosują możliwości uczenia sieci neuronowych,
- ✓ posiadają czytelną interpretację działania opartą o regułową reprezentację wiedzy,
- ✓ przedstawianej w sposób symboliczny,
- ✓ dokonując globalnej optymalizacji parametrów metodami ewolucyjnymi,
- ✓ można je uczyć metodami znanymi z sieci neuronowych, np. metodą wstecznej propagacji błędów,
- ✓ Wykorzystują zwykle wnioskowanie typu Mamdaniego lub schemat Takagi-Sugeno.

WNIOSKOWANIE MAMDANIEGO

- Polega na połączeniu poprzedników i następników reguł za pomocą t-normy zrealizowanej w postaci typu min lub typu iloczyn. Następnie dokonywana jest agregacja poszczególnych reguł za pomocą t-konormy (s-normy).
- Rozróżniamy systemy typu A, które na wyjściu bloku wnioskowania dają N zbiorów rozmytych, oraz systemy typu B, na wyjściu którego otrzymujemy jeden zbiór rozmyty, który jest wynikiem agregacji rezultatów wnioskowania w poszczególnych regułach.

T-NORMA

Funkcję dwóch zmiennych T

$$T : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$$

nazywamy *t-normą*, jeżeli

(i) funkcja T jest niemalejąca względem obu argumentów

$$T(a, c) \leq T(b, d) \quad \text{dla} \quad a \leq b, \ c \leq d;$$

(ii) funkcja T spełnia warunek przemienności

$$T(a, b) = T(b, a);$$

(iii) funkcja T spełnia warunek łączności

$$T\big(T(a, b), c\big) = T\big(a, T(b, c)\big);$$

(iv) funkcja T spełnia warunek brzegowy

$$T(a, 1) = a,$$

gdzie $a, b, c, d \in [0, 1]$.

Z założeń mamy

$$T(a, 0) = T(0, a) \leq T(0, 1) = 0.$$

Zatem drugi warunek brzegowy przybiera postać

$$T(a, 0) = 0.$$

W dalszej części rozdziału działanie t-normy na argumentach a i b będziemy oznaczać

$$T(a, b) = a \overset{T}{*} b.$$

Jeżeli np. a i b utożsamiamy z funkcjami przynależności zbiorów rozmytych A i B, to równość (4.140) zapisujemy jako

$$\mu_{A \cap B}(x) = T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \mu_A(x) \overset{T}{*} \mu_A(x).$$

T-KONORMA

Funkcję dwóch zmiennych S

$$S : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$$

nazywamy *t-konormą*, jeżeli jest niemalejąca względem obu argumentów, spełnia warunek przemienności i łączności, a ponadto spełniony jest następujący warunek brzegowy:

$$S(a, 0) = a.$$

Z założeń oraz warunku (4.154) wynika, że

$$S(a, 1) = S(1, a) \geq S(1, 0) = 1.$$

Zatem drugi warunek brzegowy przybiera postać

$$S(a, 1) = 1.$$

Działanie t-konormy na argumentach a i b będziemy oznaczać

$$S(a, b) = a \overset{S}{*} b.$$

Korzystając z właściwości łączności, powyższą definicję można w sposób następujący uogólnić na przypadek t-konormy wielu zmiennych:

$$\underset{i=1}{\overset{n}{S}} \{a_i\} = T\left\{ \underset{i=1}{\overset{n-1}{S}} \{a_i\}, a_n \right\} = S\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = S\{\mathbf{a}\} = a_1 \overset{S}{*} a_2 \overset{S}{*} \ldots \overset{S}{*} a_n.$$

AI

CZY SZTUCZNE SIECI NEURONOWE PROWADZĄ DO AI?