Strona główna
Strona tytułowa
Spis treści
Strona 1 z 9
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach przy użyciu MATLAB-a

Ireneusz Czajka

Kraków listopad 2000

Strona główna
Strona tytułowa
Spis treści
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strona 2 z 9
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

1. Wstęp

Równania różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach znajdują zastosowanie do opisu układów dynamicznych. Aby móc zastosować taką formę opisu matematycznego należy:

1. dokonać dyskretyzacji układu rzeczywistego,
2. pominąć mało istotne wpływy,
3. założyć stałość parametrów układu.

Model fizyczny otrzymany w wyniku zastosowania powyższych uproszczeń możemy opisać już równaniem różniczkowym zwyczajnym o stałych współczynnikach.

Z kolei matematyczny opis modelu fizycznego nazywamy **modelem matematycznym**. Najczęściej ma on postać układu równań różniczkowych drugiego rzędu (każda masa bezwładna generuje jedno równanie) z wzajemnymi sprzężeniami.

2. Układy równań różniczkowych

Równanie różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach rzędu n da się przedstawić jako układ n równań różniczkowych rzędu 1.

Załóżmy, że mamy równanie różniczkowe:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}) \tag{1}$$

Wykonamy podstawienie:

$$\begin{aligned} z_1 &= x, \\ z_2 &= \dot{z}_1, \\ &\vdots \\ z_n &= \dot{z}_{n-1} = \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} \end{aligned} \tag{2}$$

Dzięki temu podstawieniu otrzymamy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}) \end{aligned} \tag{3}$$

2.1. Przykład

Równanie opisujące ruch masy m zawieszonej sprężyście na sprężystości k, z tłumieniem b opisuje równanie:

Strona główna

Strona tytułowa

Spis treści

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Strona 4 z 9

Powrót

Full Screen

Zamknij

Koniec

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t,x) \tag{4}$$

Podstawienia wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} z_1 &= x \\ z_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

układ równań, który otrzymujemy wygląda tak:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -\frac{b}{m} z_2 - \frac{k}{m} z_1 + \frac{f(t,z_1)}{m} \end{aligned}$$

Możemy zapisać go w postaci macierzowej jako:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & \frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(t,z_1)}{m} \end{bmatrix}$$

3. Metody rozwiązywania układów równań różniczkowych o stałych współczynnikach pierwszego rzędu

Najbardziej prymitywną metodą jest metoda Eulera. Polega ona na przybliżeniu szukanego rozwiązania odcinkami prostych stycznych do rozwiązania w dyskretnych punktach oddalonych od siebie o długość kroku Δx

Udoskonaleniem tej metody zajmowało się wielu badaczy. Obecnie stosuje się rozwinięcie w postaci metody Rungego–Kutty.

Równanie w postaci:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

rozwiązuje się korzystając z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \Delta x \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta y \end{aligned}$$

Gdzie: Δx jest znane (czasami stałe), zaś Δy obliczamy w oparciu o wzory:

$$\begin{aligned} k_1 &= \Delta x \cdot f(x_i, y_i) \\ k_2 &= \Delta x \cdot f(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}) \\ k_3 &= \Delta x \cdot f(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}) \\ k_4 &= \Delta x \cdot f(x_i + \Delta x, y_i + k_3) \\ \Delta y &= \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \end{aligned}$$

W zaprezentowanym przypadku mamy do czynienia z metodą Rungego–Kutty rzędu czwartego.

W MATLAB-ie metoda ta jest zaimplementowana w postaci funkcji `ode23` i `ode45` obliczających rozwiązanie równania odpowiednio metodą R-K rzędu 2-3 i 4-5. Opis komend można uzyskać korzystając z polecenia `help` Matlab-a.

4. Wykorzystanie

Aby móc rozwiązać układ równań różniczkowych rzędu metodami `ode23` lub `ode45` należy:

1. zapisać układ równań w postaci układu równań pierwszego rzędu,
2. zapisać układ równań w postaci m-pliku funkcyjnego,
3. wywołać funkcję `ode23` lub `ode45`

M-plik funkcyjny opisujący układ r. różniczkowych musi przyjmować dwa argumenty: (t,x), t – czas, zmienna niezależna (x), zaś x – zmienna zależna (y). Zwracać zaś kolumnowy wektor pochodnych $\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}$

4.1. Przykład m-pliku funkcyjnego

M-plik funkcyjny o nazwie `uklad1.m` może mieć następującą postać:

```
function dy=uklad1(t,y)
global m,k,b
dy=[0 1;-k/m -b/m]*y+f(t,y)/m
```

gdzie $f(t,y)$ oznacza funkcję wymuszającą i może to być np: $f(t,y) = 100\sin(314*t)$

Interpretacja wyników zależy od przyjętych podstawień. W naszym przykładzie z_1 oznacza przemieszczenie masy, zaś z_2 oznacza jej prędkość.