

## Opracowanie cwiczen nr 2 - tablice Karnaugh, dr inz. Ernest Jamro

Tablice Karnaugh sa wygodnym sposobem zapisu funkcji ze wzgledu na latwosc minimalizacji.

Dla kazdej kombinacji zmiennych do kratek tablicy wpisujemy wartosc funkcji: „1”, „0”, a gdy funkcja jest nieokreslona „x” lub „-”.

Przyklady tablic Karnaugh dla odpowiednio dwóch, trzech i czterech zmiennych wejsciowych i jednej wyjsciowej:

a)

| B \ A | 0 | 1 |
|-------|---|---|
| 0     | x | 1 |
| 1     | 1 | 0 |

b)

| BC \ A | 0 | 1 |
|--------|---|---|
| 00     | 1 | 0 |
| 01     | 1 | x |
| 11     | 0 | x |
| 10     | 1 | 1 |

c)

| CD \ AB | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 0  | x  | x  | 0  |
| 01      | x  | 0  | 1  | 0  |
| 11      | 0  | 1  | 1  | 0  |
| 10      | 0  | 1  | 0  | 1  |

Powyzszym tablicom odpowiada zapis funkcji za pomoca tabeli:

a)

| AB  | Q (wartosc) |
|-----|-------------|
| 0 0 | x           |
| 0 1 | 1           |
| 1 0 | 1           |
| 1 1 | 0           |

b)

| ABC   | Q |
|-------|---|
| 0 0 0 | 1 |
| 0 0 1 | 1 |
| 0 1 0 | 1 |
| 0 1 1 | 0 |
| 1 0 0 | 0 |
| 1 0 1 | x |
| 1 1 0 | 1 |
| 1 1 1 | x |

c)

| ABCD    | Q |
|---------|---|
| 0 0 0 0 | 0 |
| 0 0 0 1 | x |
| 0 0 1 0 | 0 |
| 0 0 1 1 | 0 |
| 0 1 0 0 | x |
| 0 1 0 1 | 0 |
| 0 1 1 0 | 1 |
| 0 1 1 1 | 1 |
| 1 0 0 0 | 0 |
| 1 0 0 1 | 0 |
| 1 0 1 0 | 1 |
| 1 0 1 1 | 0 |
| 1 1 0 0 | x |
| 1 1 0 1 | 1 |
| 1 1 1 0 | 0 |
| 1 1 1 1 | 1 |

Zmienne wejsciowe sa zapisywane za pomoca kodu Grey’a (a nie systemem dwójkowym), dzieki czemu sasiednie komórki różnia sie tylko jednym bitem. Ma to znaczenie podczas minimalizacji formuł Boolowskich. Wykorzystujemy tu regule sklejania:

$$AB + AB' = A(B + B') = A \quad \text{lub} \quad (A + B)(A + B') = A$$

Z tego wynika, ze sasiednie zmienne różniace sie jednym bitem moga zostac zredukowane.

## Minimalizacja formuły Boolowskiej za pomocą metody Karnaugh (dla 2,3 lub 4 zmiennych) przeprowadza się następująco:

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 1  | 0  | 0  | 1  |
| 01      | x  | 0  | 0  | 1  |
| 11      | 0  | 1  | 0  | 0  |
| 10      | 1  | 0  | 0  | 1  |

**a) Postać dysjunkcyjna** - zaznaczamy jak największe grupy pól zawierających tylko jedynki, przy czym:

?? ilość pól w grupie ma być potęgą dwójki: 1,2,4,8,...

?? łączymy tylko sąsiadujące pola lub oddzielone krawędzie tablicy (kolor niebieski - jedna grupa (można tak łączyć, gdyż każde dwa pola w obrębie grupy różnią się jednym bitem))

?? wybieramy takie grupy, aby zawierały wszystkie jedynki co najmniej raz (w obrębie kilku grup ta sama jedynka może się powtarzać). Ilość pól które zawiera pojedyncza grupa ma być jak największa, a łączna ilość grup jak najmniejsza. Zapewnia to

minimalizację formuły.

?? Uwaga: W przypadku występowania znaków nieokreśloności można (nie jest to konieczne) połączyć z jedynkami lub zerami. Otrzymamy dzięki temu prostszą formułę, gdyż większy obszar opisuje mniej zmiennych. (wykorzystane przy tworzeniu grupy zielonej i czerwonej)

Dla naszego przykładu grupa zielona, niebieska i czarna pokrywają wszystkie jedynki. Jednakże należy wybrać grupę czerwoną zamiast zielonej ponieważ pokrywa ona większą liczbę pól. W konsekwencji rozwiązaniem jest grupa niebieska, czerwona i czarna.

### **Zapis formuły Boolowskiej w przypadku postaci dysjunkcyjnej (suma iloczynów)**

| AB \ CD   | <u>00</u> | 01 | 11 | <u>10</u> |
|-----------|-----------|----|----|-----------|
| <u>00</u> | 1         | 0  | 0  | 1         |
| <u>01</u> | x         | 0  | 0  | 1         |
| 11        | 0         | 1  | 0  | 0         |
| 10        | 1         | 0  | 0  | 1         |

Formułę zapisujemy w postaci sumy iloczynów. W skład iloczynów wchodzi zmienna wejściowa, która w obrębie jednej grupy ma stałą wartość. Gdy zmienna wynosi jeden - nie negujemy tej zmiennej wpisując ją do iloczynu, dla wartości zero - zapisujemy postać zanegowaną

Przykładowo dla czerwonej grupy argumenty wejściowe B i C nie zmieniają swoich wartości (wynoszących zero).

Składnik pochodzący od czerwonej grupy zapiszemy więc **B'C'**

Jedynkę z czarnej grupy zapisujemy jako **A'BCD** - zmienna ma stałą wartość (A=0 czyli negujemy,

pozostałe 1, czyli piszemy postać niezanegowaną)

Zapisując formułę dla grup czerwonej, czarnej, niebieskiej otrzymujemy :

$$Y = \textcolor{red}{B'C'} + A'BCD + \textcolor{blue}{B'D'}$$

Dla grup zielonej, czarnej, niebieskiej otrzymujemy:

$$Y = \mathbf{B'C'D} + A'BCD + \mathbf{B'D'}$$

Jak widac, pierwsza formuła jest prostsza, co potwierdza slusznosc wyboru grup mozliwie najwiekszych.

| AB \ C |   | 00 | 01 | 11 | 10 |
|--------|---|----|----|----|----|
| C      | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  |
|        | 1 | 0  | 1  | 1  | 1  |

#### b) Postac koniunkcyjna

- różni się od poprzedniej tym, że grupujemy zera, oraz że formułę zapisujemy w postaci iloczynu sum. Zmienne mające stałą wartość negujemy, gdy ich wartość wynosi jeden, dla wartości zero - zapisujemy postać niezanegowaną.

Np. dla tablicy obok niebieska grupa zapiszemy jako sumę  $(A + B)$ . (Zmienne A, B mają dla tej grupy stałą wartość zero). Cała formuła będzie miała postać:

$$Y = (\mathbf{A + B}) * \mathbf{C}$$

#### Minimalizacja formuły Boolowskiej za pomocą metody Karnaugh dla pięciu lub sześciu zmiennych :

Jest przeprowadzana tak jak minimalizacja dla mniejszej ilości zmiennych, dodatkowo jeszcze w diagramie pięciu lub sześciu zmiennych można sklejać grupy kratek leżące symetrycznie względem osi symetrii w dwóch częściach diagramu (przykład poniżej)

| Y \ ABC |    | DE  |     |     |     |     |     |     |     |
|---------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|         |    | 000 | 001 | 011 | 010 | 110 | 111 | 101 | 100 |
| DE      | 00 | 0   | 1   | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   |
|         | 01 | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   |
|         | 11 | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   |
|         | 10 | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   |

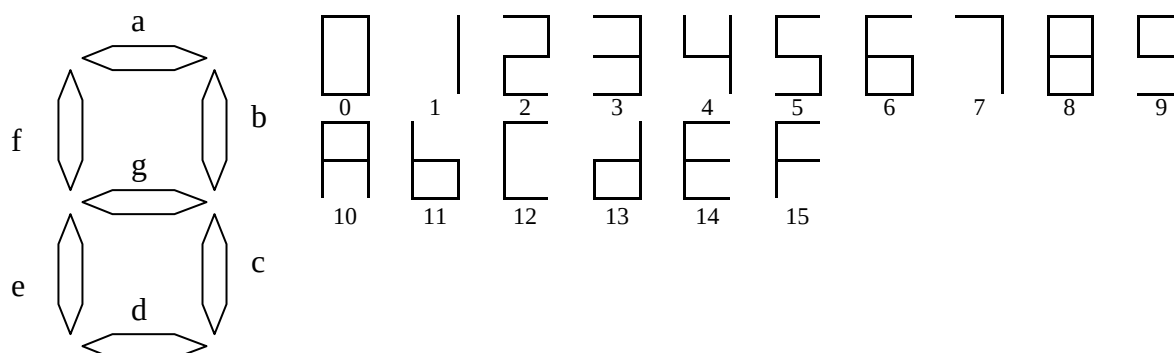
os symetrii

Postać dysjunkcyjna:

$$Y = \mathbf{B'CD'E'} + \mathbf{BCE}$$

## Przykład I.

### Sterowanie wyświetlaczem siedmiosegmentowym (przykład zastosowania t. K.)



Każdy element wyświetlacza oznaczamy umownie literą. Cyfry mają symbole odpowiednio od 0 - 9, a dodatkowo litery oznaczające liczby w systemie szesnastkowym A - F symbole odpowiednio od 10 - 15

Sterowanie takim wyświetlaczem zapisujemy za pomocą tablic Karnaugh'a osobno dla każdego elementu a - g, w których zmienne będą opisywać symbol wyświetlanego znaku (wynik to 1- zapalony element dla danej zmiennej, 0 - wyłączony)

Symbol z systemu dziesiętnego zamieniamy na dwójkowy:

| Symbol | DCBA - zmienne |
|--------|----------------|
| 0      | 0000           |
| 1      | 0001           |
| 2      | 0010           |
| 3      | 0011           |
| 4      | 0100           |
| 5      | 0101           |
| 6      | 0110           |
| 7      | 0111           |

|       | DCBA |
|-------|------|
| 8     | 1000 |
| 9     | 1001 |
| 10(A) | 1010 |
| 11(B) | 1011 |
| 12(C) | 1100 |
| 13(D) | 1101 |
| 14(E) | 1110 |
| 15(F) | 1111 |

Daje nam to następująca kolejność w tablicy:

| BA \ DC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 0  | 1  | 3  | 2  |
| 01      | 4  | 5  | 7  | 6  |
| 11      | 12 | 13 | 15 | 14 |
| 10      | 8  | 9  | 11 | 10 |

Np. dla segmentu b funkcja ma wartosc „1” dla symboli {0,1,2,3,4,7,8,9,10(A),13(D)}

**b**

| BA \ DC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 01      | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 11      | 0  | 1  | 0  | 0  |
| 10      | 1  | 1  | 0  | 1  |

A
B

C
D

$$b = D'C' + C'A' + D'B'A' + D'BA + DB'A \quad (\text{postac dysjunkcyjna})$$

**b**

| BA \ DC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 01      | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 11      | 0  | 1  | 0  | 0  |
| 10      | 1  | 1  | 0  | 1  |

$$b = (D + C' + B + A')(C' + B' + A)(D' + B' + A')(D' + C' + A) \quad (\text{postac koniunkcyjna})$$

Jezeli na wyswietlaczu potrzebujemy jedynie liczb od 0 do 9 stany odpowiadajace literom A-F moga przyjmowac wartosci dowolne, gdyz tych stanów po prostu nie wykorzystujemy. W tabeli zaznaczamy to za pomoca stanu nieokreślonego „x”. Rozwazmy ten przypadek dla powyższego segmentu :

**b**

| BA \ DC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 01      | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 11      | x  | x  | x  | x  |
| 10      | 1  | 1  | x  | x  |

$$b = AB + A'B' + C' \quad (\text{postac dysjunkcyjna}) - \text{uproszczone dzieki zgrupowaniu stanów nieokreślonych razem z jedynkami}$$

**b**

| BA \ DC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 01      | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 11      | x  | x  | x  | x  |
| 10      | 1  | 1  | x  | x  |

$$b = (A + B' + C')(A' + B + C') \text{ (postac koniunkcyjna)}$$

**Segment g:** (funkcja ma wartosc „1” dla symboli {2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10(A), 11(B), 13(D), 14(E), 15(F)})

**g**

| BA \ DC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 0  | 0  | 1  | 1  |
| 01      | 1  | 1  | 0  | 1  |
| 11      | 0  | 1  | 1  | 1  |
| 10      | 1  | 1  | 1  | 1  |

$$g = BC' + BD + A'B + C'D + AB'D + B'CD' \text{ (postac dysjunkcyjna)}$$

**g**

| BA \ DC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 0  | 0  | 1  | 1  |
| 01      | 1  | 1  | 0  | 1  |
| 11      | 0  | 1  | 1  | 1  |
| 10      | 1  | 1  | 1  | 1  |

$$g = (B + C + D)(A' + B' + C' + D')(A + B + C' + D') \text{ (postac koniunkcyjna)}$$

Rozważmy sytuację, gdy stany odpowiadające literom A-F mogą przyjmować wartości dowolne (segment g):

| g<br>BA<br>DC |   | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------------|---|----|----|----|----|
|               |   | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00            | 0 | 0  | 1  | 1  |    |
| 01            | 1 | 1  | 0  | 1  |    |
| 11            | x | x  | x  | x  |    |
| 10            | 1 | 1  | x  | x  |    |

$$g = D + CB' + BA' + C'B$$

| g<br>BA<br>DC |   | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------------|---|----|----|----|----|
|               |   | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00            | 0 | 0  | 1  | 1  |    |
| 01            | 1 | 1  | 0  | 1  |    |
| 11            | x | x  | x  | x  |    |
| 10            | 1 | 1  | x  | x  |    |

$$g = (D + C + B)(C' + B' + A')$$

## Przykład II. Sumator

W naszym przypadku jest to układ kombinacyjny sumujący dwie dwubitowe liczby. Jego działanie opisuje poniższa tabela:

$a_1, a_0$  - pierwsza dodawana liczba ( $a_1 ? a_1 * 2^1, a_0 ? a_0 * 2^0$ )

$b_1, b_0$  - druga dodawana liczba

$S_0$  - pierwszy bit wyniku ( $S_0 * 2^0$ )

$S_1$  - drugi bit wyniku ( $S_1 * 2^1$ )

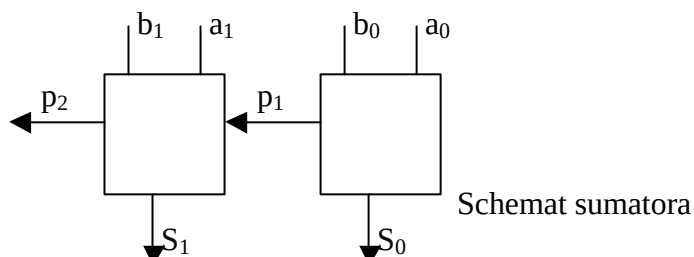
$p_1, p_2$  - liczby odpowiedzialne za przenoszenie sumy nie mieszczacej się w obrebie bitu do bitu wyzszego

Np. dodając liczby 01 + 11 (zapis dwójkowy) najpierw dodajemy pierwsze bity liczb (postaci  $x * 2^0$ ). Otrzymujemy  $1 * 2^0 + 1 * 2^0 = 1 * 2^1$ . Nie możemy wstawić tej liczby do  $S_0$ , więc zapamiętujemy ją w  $p_1$  przyjmując  $p_1 = 1$ , a za  $S_0$  wstawiamy 0. Następnie dodajemy drugie

bity liczb, otrzymując  $1 \cdot 2^1$ . Uwzględniając sumę pierwszych bitów (zmienna  $p_1$ ) otrzymujemy  $S_1 = 0$ , wynik przechodzi do następnego bitu, czyli  $p_2 = 1$ . Ostatecznie odczytujemy wynik 100 ( $p_2 = 1 \cdot 2^2$ ,  $S_1 = 0 \cdot 2^1$ ,  $S_0 = 1 \cdot 2^0$ )

| $a_1$ | $a_0$ | $b_1$ | $b_0$ |  | $p_2$ | $S_1$ | $p_1$ | $S_0$ |
|-------|-------|-------|-------|--|-------|-------|-------|-------|
| 0     | 0     | 0     | 0     |  | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 0     | 1     | 0     | 0     |  | 0     | 0     | 0     | 1     |
| 0     | 0     | 0     | 1     |  | 0     | 0     | 0     | 1     |
| 0     | 1     | 0     | 1     |  | 0     | 1     | 1     | 0     |
| 1     | 0     | 0     | 0     |  | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 1     | 1     | 0     | 0     |  | 0     | 1     | 0     | 1     |
| 1     | 0     | 0     | 1     |  | 0     | 1     | 0     | 1     |
| 1     | 1     | 0     | 1     |  | 1     | 0     | 1     | 0     |
| 0     | 0     | 1     | 0     |  | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 0     | 1     | 1     | 0     |  | 0     | 1     | 0     | 1     |
| 0     | 0     | 1     | 1     |  | 0     | 1     | 0     | 1     |
| 0     | 1     | 1     | 1     |  | 1     | 0     | 1     | 0     |
| 1     | 0     | 1     | 0     |  | 1     | 0     | 0     | 0     |
| 1     | 1     | 1     | 0     |  | 1     | 0     | 0     | 1     |
| 1     | 0     | 1     | 1     |  | 1     | 0     | 0     | 1     |
| 1     | 1     | 1     | 1     |  | 1     | 1     | 1     | 0     |

$\begin{matrix} \text{blue} & \text{red} & \text{black} & \text{green} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 11 & + 01 & = & 100 \end{matrix}$



Do zapisania funkcji dla wyjścia „ $S_0$ ” i wyjścia „ $p_1$ ” potrzebne będą dwie tablice, uwzględniające dane wejściowe  $a_0$ ,  $b_0$  :

|       |   | $a_0$ |   |
|-------|---|-------|---|
|       |   | 0     | 1 |
| $b_0$ | 0 | 0     | 1 |
|       | 1 | 1     | 0 |

$S_0 = a_0 b_0' + a_0' b_0 =$   
 $= a_0 \oplus b_0$

|       |   | $a_0$ |   |
|-------|---|-------|---|
|       |   | 0     | 1 |
| $b_0$ | 0 | 0     | 0 |
|       | 1 | 0     | 1 |

$p_1 = a_0 b_0$

Do zapisania funkcji dla wyjścia „ $S_1$ ” i wyjścia „ $p_2$ ” również potrzebne będą dwie tablice, tym razem uwzględniające dane wejściowe  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $p_1$  :



|                             |   |    |    |    |    |
|-----------------------------|---|----|----|----|----|
| $S_1$<br>$a_1 b_1$<br>$p_1$ |   | 00 | 01 | 11 | 10 |
|                             |   |    |    |    |    |
| 0                           | 0 | 1  | 0  | 1  |    |
| 1                           | 1 | 0  | 1  | 0  |    |

$$S_1 = a_1' b_1' p_1 + a_1' b_1 p_1' + a_1 b_1 p_1 + a_1 b_1' p_1'$$

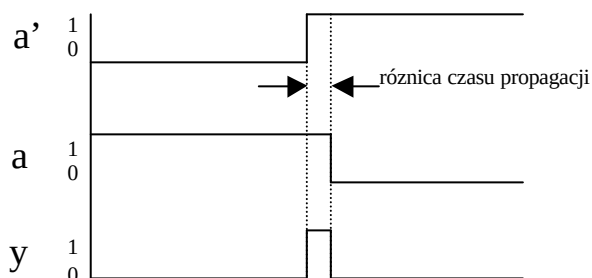
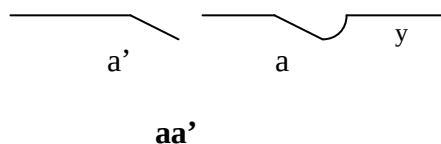
| $p_2$<br>$a_1 b_1$<br>$p_1$ |   | 00 | 01 | 11 | 10 |
|-----------------------------|---|----|----|----|----|
|                             |   |    |    |    |    |
| 0                           | 0 | 0  | 1  | 0  |    |
| 1                           | 0 | 1  | 1  | 1  |    |

$p_2 = a_1 p_1 + a_1 b_1 + b_1 p_1$

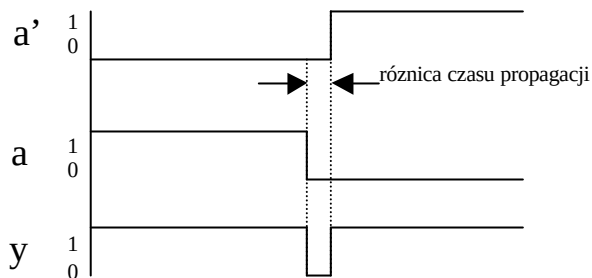
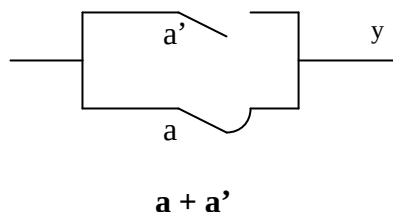
## Zjawisko hazardów

Rzeczywiste bramki zmieniają swój stan z pewnym opóźnieniem. Nazywamy go czasem propagacji bramki. W niektórych przypadkach takie opóźnienie może być niekorzystne.

Najprostszym przykładem są wyrażenia:  $a + a'$  (równoległe połączenie styków zwrotnego i rozwiernego) oraz  $aa'$  (połączenie szeregowo). Jeżeli zwarcie styku zwrotnego i rozwarcie styku rozwiernego (lub odwrotnie) następuje równocześnie, to pierwsze wyrażenie jest równe jedności a drugie zero także podczas zmiany stanu przekaznika. Jeżeli jednak czasy, w których następuje zmiana stanu będą różne, to pierwsze z wyrażeń może przybrać wartość zero, a drugie wartość jeden. Zjawisko to nazywamy hazardem.



rys.1 Hazard statyczny w zerze



rys.2 Hazard statyczny w jedynce

Hazardy dziela sie na statyczne i dynamiczne.

Styczne - kiedy wyjscie, które nie ma zmienic stanu krótkotrwale zmienia stan na przeciwny: w zerze kiedy wyjscie ma pozostac w 0 (patrz rys. 1), w jedynce - gdy wyjscie ma pozostac w 1 (patrz rys. 2)

Dynamiczne - kiedy wystepuja wielokrotne zmiany stanów na wyjsciach które zmieniaja stan.



Hazard dynamiczny

Hazardy moga w okreslonych przypadkach powodowac nieprawidlowe dzialanie układow (jezeli wyjscia, na których pojawiaja sie hazardy sa interpretowane asynchronicznie)

### Usuwanie hazardów w sieci dwupoziomowej:

Aby usunac hazardy w postaci dysjunkcyjnej, nalezy sprawdzic w tablicy Karnaugh czy wszystkie przylegajace jedynki sa pokryte wspólna grupa. Jezeli nie to nalezy dodac dodatkowe grupy.

Aby usunac hazardy w postaci koniunkcyjnej, nalezy sprawdzic w tablicy Karnaugh czy wszystkie przylegajace zera maja wspólne grupy. Jesli nie to dodajemy dodatkowe grupy.

### Przykład hazardu statycznego w jedynce:

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---------|----|----|----|----|
| 00      | 0  | 0  | 1  | 1  |
| 01      | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 11      | 1  | 1  | 0  | 0  |
| 10      | 0  | 0  | 0  | 0  |

Postac dysjunkcyjna (kolor niebieski) :  $y = AC' + A'D$ . Przy przejsci z 0101 do 1101 wystepuje hazard. W tablicy Karnaugh komórki 0101 i 1101 sasiaduja ze soba, lecz nie sa objete wspólnym implikantem. To powoduje pojawienie sie hazardu. Dodajemy dodatkowy implikant  $C'D$  (kolor czerwony), aby go wyeliminowac. Ostatecznie funkcja ma postac:

$$y = AC' + A'D + C'D$$

## Przykład - wyświetlacz siedmiosegmentowy

W tablicy Karnaugh dla segmentu b (postać dysjunkcyjna) można zauważyć, że w jednym miejscu sąsiadujące komórki nie są objęte wspólnym implikantem. Aby wyeliminować niebezpieczeństwo hazardu dodajemy czarną grupę.

**b**

|         |    |    |    |    |
|---------|----|----|----|----|
| BA \ DC | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00      | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 01      | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 11      | 0  | 1  | 0  | 0  |
| 10      | 1  | 1  | 0  | 1  |

$b = D'C' + C'A' + D'B'A' + D'BA + DB'A$  (postać dysjunkcyjna przed eliminacją hazardu)

$b = D'C' + C'A' + D'B'A' + D'BA + DB'A + B'C'D$  (to samo po eliminacji hazardu)

W postaci koniunkcyjnej dla segmentu b zauważamy dwa zera sąsiadujące ze sobą, a nie objęte wspólnymi implikantami. Dodajemy wspólną grupę (kolor czarny) eliminując hazard.

**b**

|         |    |    |    |    |
|---------|----|----|----|----|
| BA \ DC | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00      | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 01      | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 11      | 0  | 1  | 0  | 0  |
| 10      | 1  | 1  | 0  | 1  |

$b = (D + C' + B + A')(C' + B' + A)(D' + B' + A')(D' + C' + A)$  (postać koniunkcyjna przed eliminacją hazardu)

$b = (D + C' + B + A')(C' + B' + A)(D' + B' + A')(D' + C' + A)(B' + C' + D')$  (to samo po eliminacji hazardu)