Wykład 2
Dynamika

Dr Henryk Jankowski

2010/2011

Mielec- studia niestacjonarne

Dynamika Newtona

Ruch w ujęciu kinematycznym to opis geometryczno-analityczny I

Przyczynami ruchu oraz charakterem obiektów zajmuje się:

DYNAMIKA

Fakty:
Identyczne działanie powoduje różne zachowanie się (ruch) odmiennych obiektów.

Definicje:
- Wprowadzamy pojęcie siły F
- obiekt substancjonalny charakteryzuje masa m

Masę (ilość substancji) możemy określić przez porównanie do wzorca (układ SI → 1 kg) — skalar

Siła
Jeżeli na ciało o masie m działa siła F, to siłę możemy zdefiniować jako zmianę w czasie pędu p ciała — wektor

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

gdy $m = \mathrm{const}$ $$\boxed{\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}}$$

Układ SI → niuton $[N] = \left[\frac{kg\, m}{s^2}\right]$

Masa m

Siła $\vec{F}$

Pęd $\vec{p}$

Zasady dynamiki Newtona_1

Zasada I

ZASADY DYNAMIKI NEWTONA (2)

I zasada

Ciało jest w spoczynku ($\vec{v}=0$) lub w ruchu jednostajnym prostoliniowym ($\vec{v}=const$), tzn $\vec{a}=0$ gdy

$$\vec{F}_{wypadkowe}=0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i=0\right)$$

Komentarz:
w/w zasada ma charakter fundamentalny i stanowi przełom w interpretacji przyrody. (odejście od koncepcji Arystotelesa)

Konsekwencje:
Istnieje taki układ odniesienia, w którym ciało (na które nie działają żadne siły) spoczywa lub porusza się z prędkością $\vec{v}=const$

lub

układ inercjalny to taki układ odniesienia, który jest w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

W praktyce:
- układ inercjalny "związujemy" z gwiazdami stałymi.
- dobrym przybliżeniem jest też laboratorium ziemskie.

Zasady dynamiki Newtona_2

Zasada II

II zasada dynamiki (m = const) (3

$$\sum \vec{F}_i = \vec{F}_{wyp} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$$

Komentarz:
II zasada mówi wyraźnie o sile wypadkowej

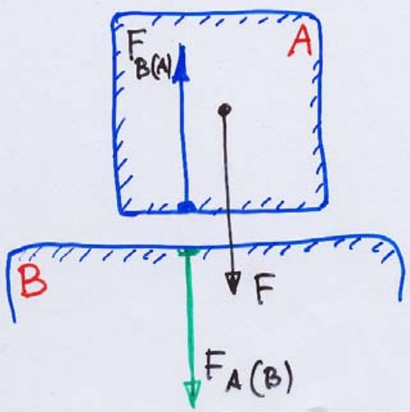
Zasada III

III zasada dynamiki

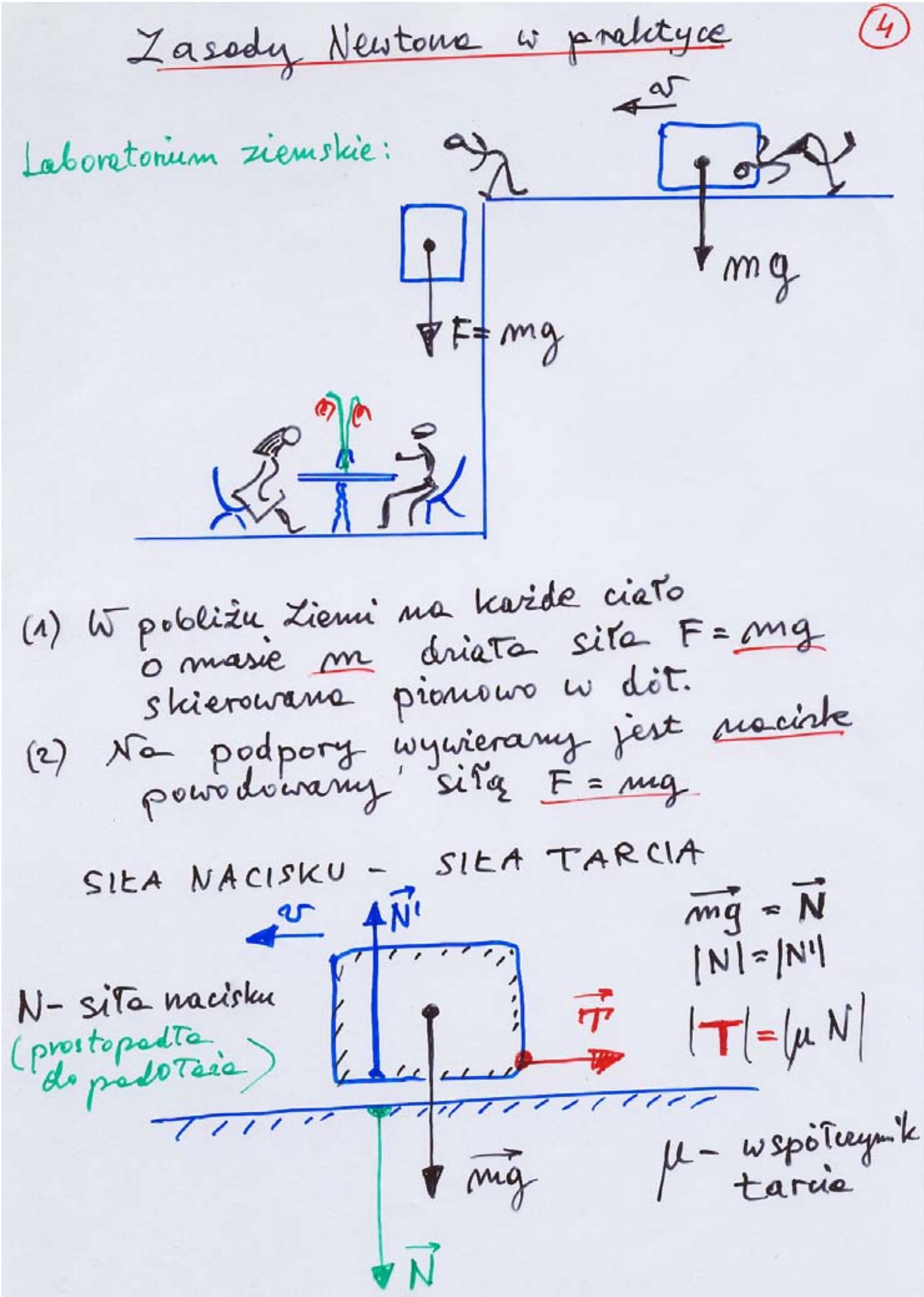
W przypadku oddziaływania sił między ciałami (m_A) i (m_B);
– siły spełniają zależność

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

Komentarz:



$$|F| = |F_{A(B)}| = |F_{B(A)}|$$



Zasady dynamiki Newtona w praktyce

(5)

Dynamika ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego

Kryterium:
$\vec{a} = \text{const}$

$$s(t) = \pm s_0 \pm v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$$
$$v(t) = \pm v_0 \pm at$$
$$a(t) = \pm a$$

czyli przyczyną tego ruchu (II zas) jest siła

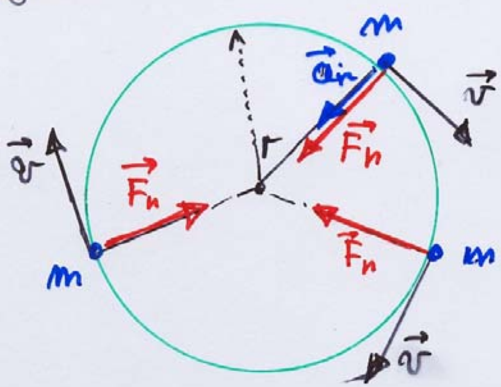
$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightsquigarrow \vec{a} = \text{const}$ gdy: $m = \text{const}$

$\rightsquigarrow \vec{F} = \text{const}$

stała siła → stałe przyśpieszenie → ruch prost. jedn. zm.

Dynamika ruchu jednostajnego po okręgu

II zasada



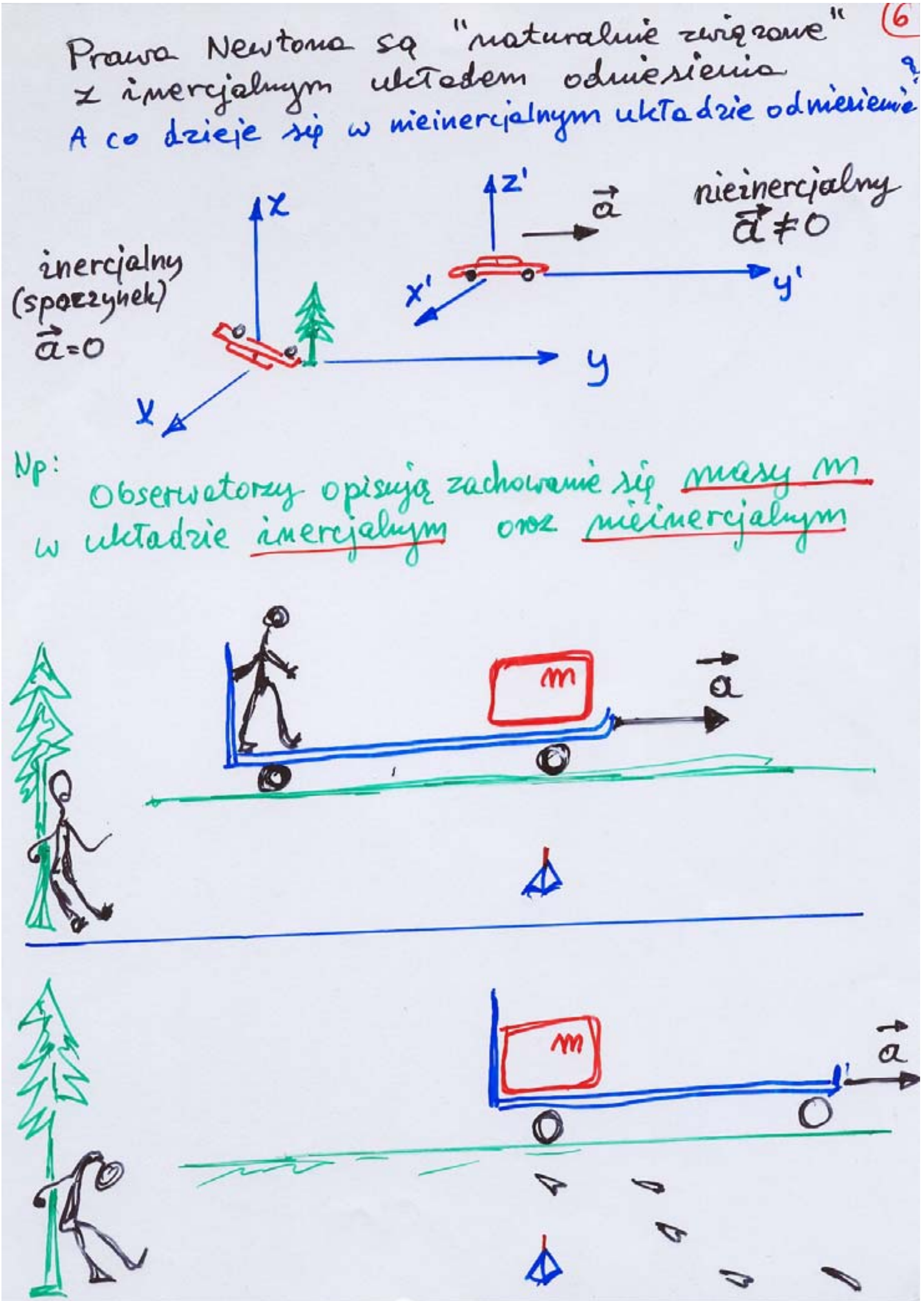
$$\vec{F}_n = m \cdot \vec{a}_n$$
$$\vec{F}_n = m \frac{v^2}{r}$$

$\vec{F}_n$ – siła dośrodkowa

okrąg – $\vec{r}$ promień

$|\vec{v}| = \text{const}$

Dynamika ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego

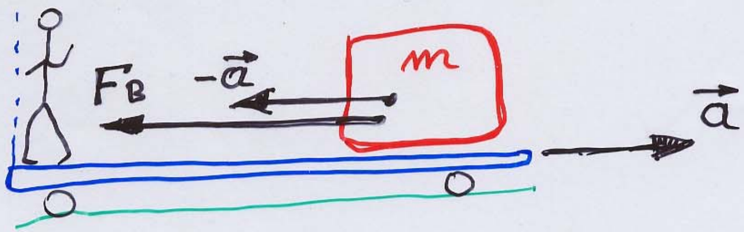


Układy inercjalne i nieinercjalne

Siła bezwładności

SIŁA BEZWŁADNOŚCI

7



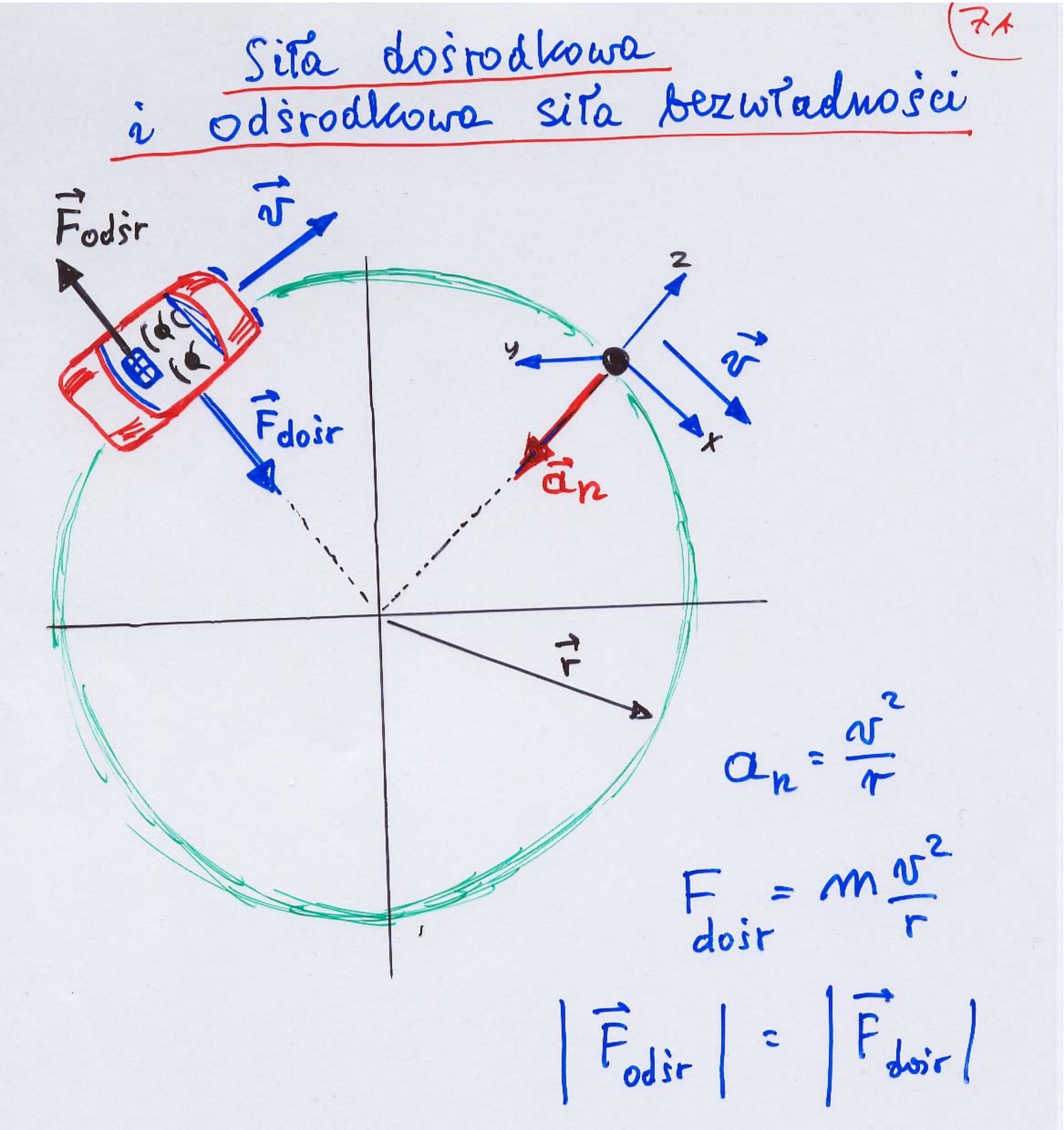
W nieinercjalnym układzie odniesienia pojawia się siła bezwładności (pozorna ale zauważona przez obserwatora.

Obserwator związany z układem nieinercjalnym musi uwzględnić wszystkie siły.

Np: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_B = m \cdot \vec{a}_{wyp}$

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = m\,\vec{a}}$$

$\vec{a}$ - ma kierunek i zwrot wypadkowej wszystkich sił

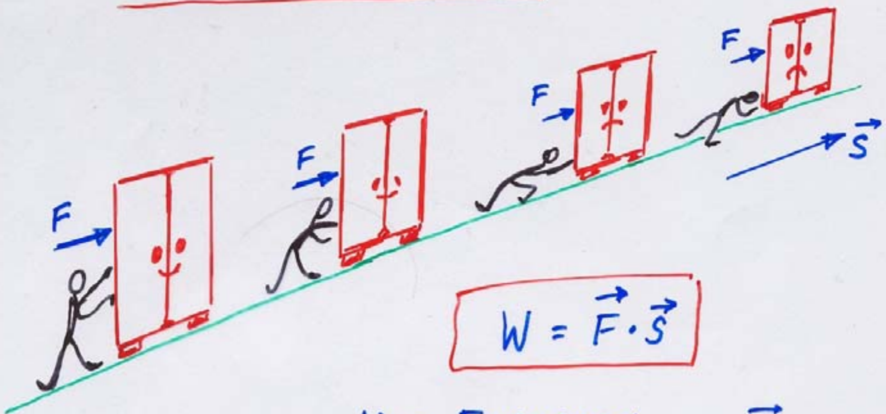


Siła dośrodkowa

Praca i energia

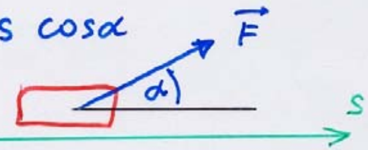
8

PRACA I ENERGIA



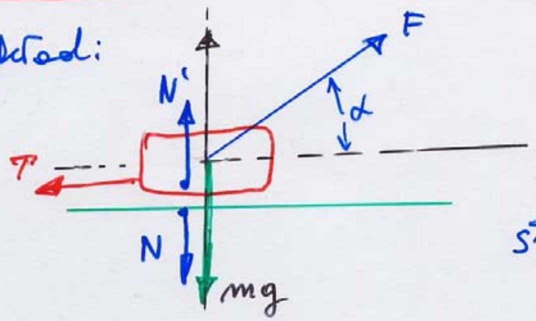
$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{S}}$$

$$W = F \cdot s \cos\alpha$$



Jednostki:
dżul $1[J] = 1[N \cdot m]$

Przykład:



Dane:
$\vec{v} = const$
$m = 5kg$
$\mu = 0.2$
$\alpha = 45^\circ$

Szukane
ile wynosi praca na drodze $s = 9\ m$

I zas. Newtona $\quad \sum \vec{F_i} = 0 \quad$ bo $\vec{v} = const$

$T = F \cdot \cos\alpha$;

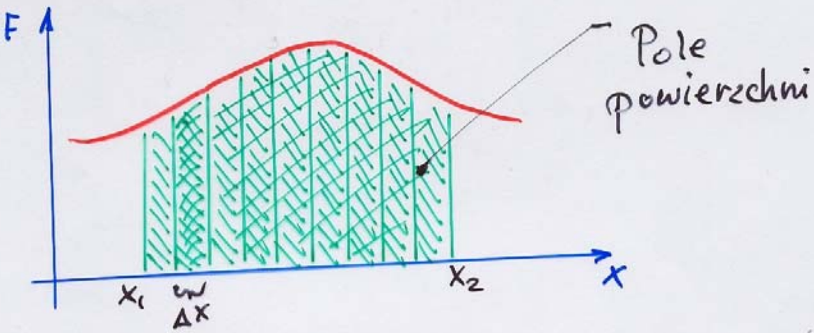
$T = \mu \cdot N \qquad N = mg - F\sin\alpha$

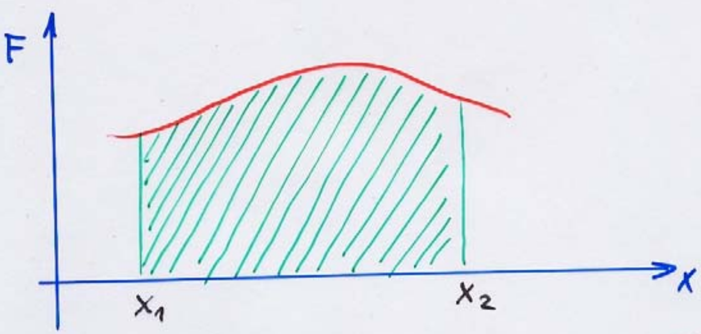
$$\boxed{W = F \cdot s \cos\alpha}$$

Praca wykonywana przez siłę zmienną

Praca wykonana przez siłę zmienną

$$dW = F \cdot dx$$



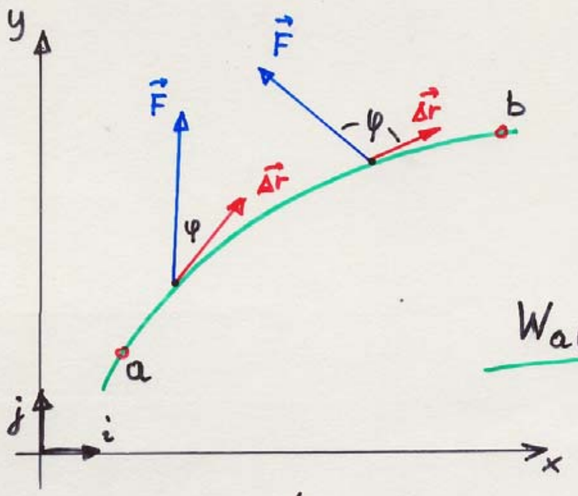


$$\boxed{W = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_1}^{x_2} F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx}$$

Całka - liczbowo odpowiada polu powierzchni pod krzywą (w zadanym przedziale)

9a

Praca wykonana przez siłę zmienną – przypadek dwuwymiarowy



$$dW = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\cos\varphi\,\Delta r$$

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b F\cos\varphi\, dr$$

Wartość całki $\int_a^b F\cos\varphi\, dr$ znajdziemy gdy określimy jak zmienia się F i φ

Bardziej "typowy" zapis:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y \qquad d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy$$

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy$$

(bowiem: $i\cdot i = j\cdot j = 1$, $i\cdot j = j\cdot i = 0$)

Wtedy:

$$\boxed{W_{ab} = \int_{a_x, a_y}^{b_x, b_y} (F_x dx + F_y dy)}$$

to są całki krzywoliniowe !!!

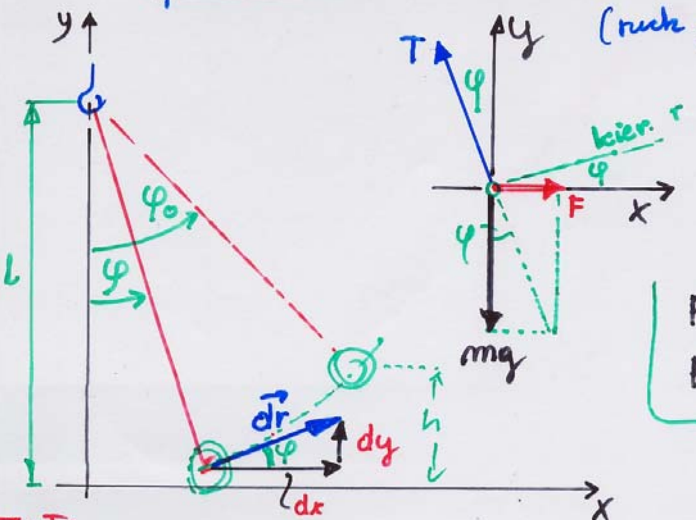
Praca wykonana przez siłę zmienną – przypadek dwuwymiarowy

Przemieszczenie masy po drodze kołowej w polu g

(96

Przykład: - przemieszczenie masy po drodze kołowej w polu g

(ruch quasi-statyczny)



$F_x = T\sin\varphi$

$mg = T\cos\varphi$

$F_x = mg\,\mathrm{tg}\,\varphi$

$F_y = 0$

zał.:
- siła $\vec{F}$ jest zawsze pozioma (zależy od φ)
- kierunek $\vec{dr}$ styczny do okręgu ($r=L$)

Praca:

$$W = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0} \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0} F\cos\varphi\, dr$$

lub:

$$W = \int_{x=0,\ y=0}^{x=(L-h)\mathrm{tg}\,\varphi_0;\ y=h} (F_x\,dx + F_y\,dy) = \int_{(\dots)}^{(\dots)} mg\,\mathrm{tg}\,\varphi\, dx$$

ponieważ

$\mathrm{tg}\,\varphi = dy/dx$

$$W = \int_{y=0}^{y=h} mg\,dy = mgh \ !$$

"Nature and Nature's laws lay hid in night:
God said, Let Newton be! and all was light."
—Alexander Pope

Sir Isaac Newton
Scientist and Mathematician

1642 - 1727

"If I have been able to see further, it was only because I stood on the shoulders of giants."
—Sir Isaac Newton

Isaac Newton was born on December 25, 1642 in Woolsthorpe, near Grantham in Lincolnshire, England. He was born the same year **Galileo** died. Newton is clearly the most influential scientist who ever lived. His accomplishments in mathematics, optics, and physics laid the foundations for modern science and revolutionized the world.

Newton was educated at Trinity College, Cambridge where he lived from 1661 to 1696. During this period he produced the bulk of his work on mathematics. In 1696 he was appointed Master of the Royal Mint, and moved to London, where he resided until his death.

As mathematician, Newton invented integral calculus, and jointly with Leibnitz, differential calculus. He also calculated a formula for finding the velocity of sound in a gas which was later corrected by Laplace.

Newton made a huge impact on theoretical astronomy. He defined the laws of motion and universal gravitation which he used to predict precisely the motions of stars, and the planets around the sun. Using his discoveries in optics Newton constructed the first reflecting telescope.

Newton found science a hodgepodge of isolated facts and laws, capable of describing some phenomena, and predicting only a few. He left it with a unified system of laws, that could be applied to an enormous range of physical phenomena, and used to make exact predications. Newton

Sir Isaac Newton

1642 - 1727

Newton - Axiomata

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus a viribus impreſſis cogitur ſtatum illum mutare.

PRojectilia perſeverant in motibus ſuis niſi quatenus a reſiſtentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorſum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt ſeſe a motibus rectilineis, non ceſſat rotari niſi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus ſuos & progreſſivos & circulares in ſpatiis minus reſiſtentibus factos conſervant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, ſive ſimul & ſemel, ſive gradatim & ſucceſſive impreſſa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem ſemper plagam cum vi generatrice determinatur, ſi corpus antea movebatur, motui ejus vel conſpiranti additur, vel contrario ſubducitur, vel oblique oblique adjicitur, & cum eo ſecundum utriuſq; determinationem componitur.

Lex. III.

Ryc. 4.44. Strona z *Zasad* z pierwszym i drugim prawem ruchu. Newton sformułował prawa mechaniki nie w postaci wzorów, lecz słownie. W polskim przekładzie prawa te brzmią:

„**I Prawo**: Każde ciało pozostaje w swym stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego po linii prostej, dopóki siły przyłożone nie zmuszą go do zmiany tego stanu.

II Prawo: Zmiana ruchu jest proporcjonalna do przyłożonej siły poruszającej i następuje wzdłuż prostej, wzdłuż której siła ta jest przyłożona."

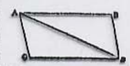
Lex. III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Quicquid premit vel trahit alterum, tantundem ab eo premitur vel trahitur. Siquis lapidem digito premit, premitur & hujus digitus a lapide. Si equus lapidem funi allegatum trahit, retrahetur etiam & equus æqualiter in lapidem: nam funis utrinq; diſtentus eodem relaxandi ſe conatu urgebit Equum verſus lapidem, ac lapidem verſus equum, tantumq; impediet progreſſum unius quantum promovet progreſſum alterius. Si corpus aliquod in corpus aliud impingens, motum ejus vi ſua quomodocunq; mutaverit, idem quoque viciſſim in motu proprio eandem mutationem in partem contrariam vi alterius (ob æqualitatem preſſionis mutuæ) ſubibit. His actionibus æquales fiunt mutationes non velocitatum ſed motuum, (ſcilicet in corporibus non aliunde impeditis:) Mutationes enim velocitatum, in contrarias itidem partes factæ, quia motus æqualiter mutantur, ſunt corporibus reciproce proportionales.

Corol. I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore deſcribere, quo latera ſeparatis.



Si corpus dato tempore, vi ſola *M*, ferretur ab *A* ad *B*, & vi ſola *N*, ab *A* ad *C*, compleatur parallelogrammum *ABDC*, & vi utraq; feretur id eodem tempore ab *A* ad *D*. Nam quoniam vis *N* agit ſecundum lineam *AC* ipſi *BD* parallelam, hæc vis nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam *BD* a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam *BD* ſive vis *N* imprimatur, ſive non, atq; adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa *BD*. Eodem argumento in fine temporis ejuſdem reperietur alicubi in linea *CD*, & idcirco in utriuſq; lineæ concurſu *D* reperiri neceſſe eſt.

Ryc. 4.45. Strona z *Zasad*, na której jest sformułowane trzecie prawo ruchu:

„**III Prawo**: Każdemu działaniu towarzyszy zawsze przeciwne i równe przeciwdziałanie, to jest wzajemne działania dwóch ciał na siebie są zawsze równe i skierowane przeciwnie."

W dolnej części strony widzimy wprowadzenie równoległoboku prędkości

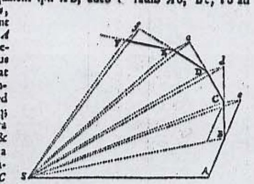
SECT. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis deſcribunt, & in planis immobilibus conſiſtere, & eſſe temporibus proportionales.

Dividatur tempu[illegible] p[illegible]rtes æqu[illegible]les, & prima temporis parte deſcribat corpus vi in[illegible] [illegible]ar[illegible] *AB*. [illegible]dem ſecunda temporis parte, ſi nil impediret, recta pergeret ad *c*, ([illegible] L[illegible] 1) deſcribens lineam *Bc* æqualem ipſi *AB*, adeo [illegible] radiis *AS*, *B*[illegible], [illegible]*S* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *ASB*, *BSc*. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulſu unico ſed magno, faciatq; corpus a recta *Bc* deflectere & pergere in recta *BC*. Ipſi *BS* parallela agatur *cC* occurrens *BC* in *C*, & completa ſecunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo *ASB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas *SB*, *Cc*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento ſi vis



Ryc. 4.46. Strona z pierwszej księgi *Zasad* z wyprowadzeniem wzoru na stałość prędkości polowej w ruchu planet. Rozumowanie Newtona jest czysto geometryczne. Przyjmuje założenie, że wskutek siły dośrodkowej ciało doznaje pchnięć w punktach *B*, *C*, *D*, *E*..., tak że za każdym razem ciało porusza się po nowym odcinku prostej *BC*, *CD*, *DE*, ... Udowadnia następnie, że trójkąty *SAB*, *SBC*, *SCD* itd. są równe. W następnej części dowodu, nie pokazanej na tej stronie, przechodzi do ciągłego działania siły dośrodkowej (zamiast trójkątów rozważa wycinki koła)

ENERGIA KINETYCZNA (10)

Rozważamy ruch masy pod wpływem siły stałej:

$$(a = const)$$

$$x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$v = v_0 + at \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t}$$

$$x = v_0 t + \frac{v - v_0}{t} \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{v + v_0}{2} \cdot t}$$

$$W = F \cdot x = m \cdot a \cdot x = m\left(\frac{v - v_0}{t}\right)\left(\frac{v + v_0}{2}\right) \cdot t =$$

$$= \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Wykonana praca przez siłę F działającą na punkt materialny (o masie m) równa jest zmianie energii kinetycznej tego punktu.

$$\boxed{W = E_k - E_{k0}}$$ dżul [J]

Moc: $\boxed{P = \frac{W}{t}}$ $\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$ wat $[W] = \left[\frac{J}{s}\right]$

moc chwilowa

Energia kinetyczna

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

10A

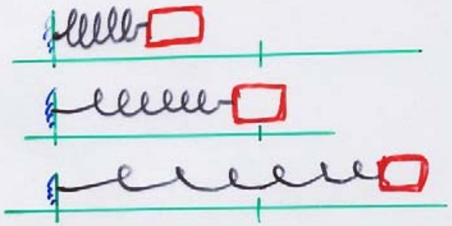
$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$ (VIS VIVA — Leibnitz)

SIŁY ZACHOWAWCZE

Przykład:

Prawo Hooka: $F = -kx$

Pod wpływem siły sprężystości ciało porusza się po drodze zamkniętej dowolnie długo jeśli nie ma tarcia.



WAŻNE:

Po przebyciu zamkniętej drogi (cyklu) zdolność ciała do wykonania pracy pozostaje taka sama — jest zachowana

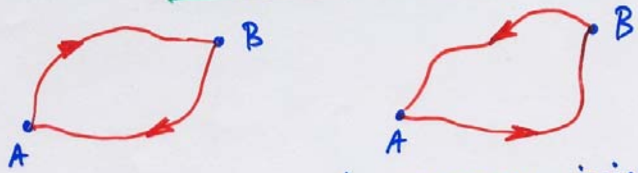
Siła sprężysta wywierana przez idealną sprężynę jest zachowana

Zasada zachowania energii

Siły zachowawcze i niezachowawcze

SIŁY ZACHOWAWCZE I NIEZACHOWAWCZE

11



Siłę nazywamy **zachowawczą** jeżeli **praca** wykonana przez nią nad punktem materialnym poruszającym się między dwoma punktami (A, B) **nie zależy** od łączącej je **drogi**.

Siła **niezachowawcza** - jeżeli praca wykonana przez nią **zależy** od **drogi**.

UKŁAD

CZYNNIK SPRAWCZY ↔ CIAŁO

STAN UKŁADU

gdy ciało porusza się **stan układu** **zmienia się**

Dla kompletności opisu wprowadzamy

ENERGIĘ STANU

czyli: ENERGIĘ POTENCJALNĄ

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0 \;;\quad E_k + E_p = const$$

(gdy działają siły zachowawcze!)

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII

Dla ciała podlegającego działaniu siły zachowawczej, którego energia potencjalna jest równa E_p, suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała:

(nie działają inne siły)

$$E_K + E_p = const$$

TWIERDZENIE O PRACY I ENERGII

$$W = \Delta E_K$$

Dla siły zachowawczej:

$$W = \Delta E_K = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_p = -W = -\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$$

$$F_x = -\frac{dE_p(x)}{dx}$$

Warto pamiętać, że obliczamy ΔE_p, a E_p określamy względem punktu odniesienia

$$E_p = \Delta E_p + E_{p(0)}$$

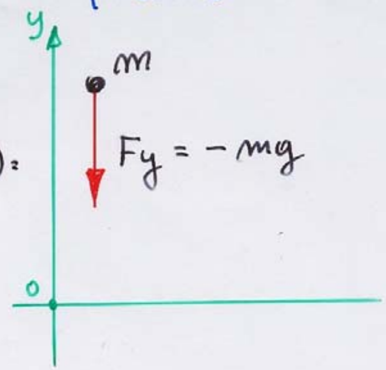
Zasada zachowania energii_1

ZZE

(13)

Przykład: grawitacyjna energia potencjalna w pobliżu powierzchni Ziemi

$y = 0, \quad E_p(0) = 0$



$$E_p(y) = -\int_0^y F(y)\,dy + E_p(0) =$$

$$= -\int_0^y (-mg)\,dy =$$

$$= mg \cdot y$$

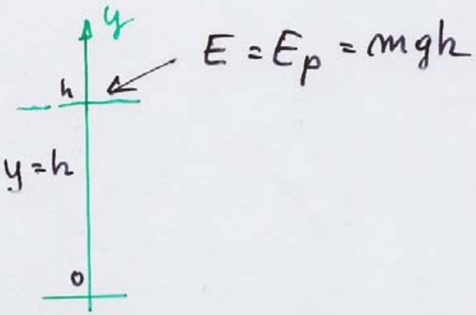
$$\boxed{E_p = mgy}$$

Ilustracja:

$E_k + E_p = \text{const}$

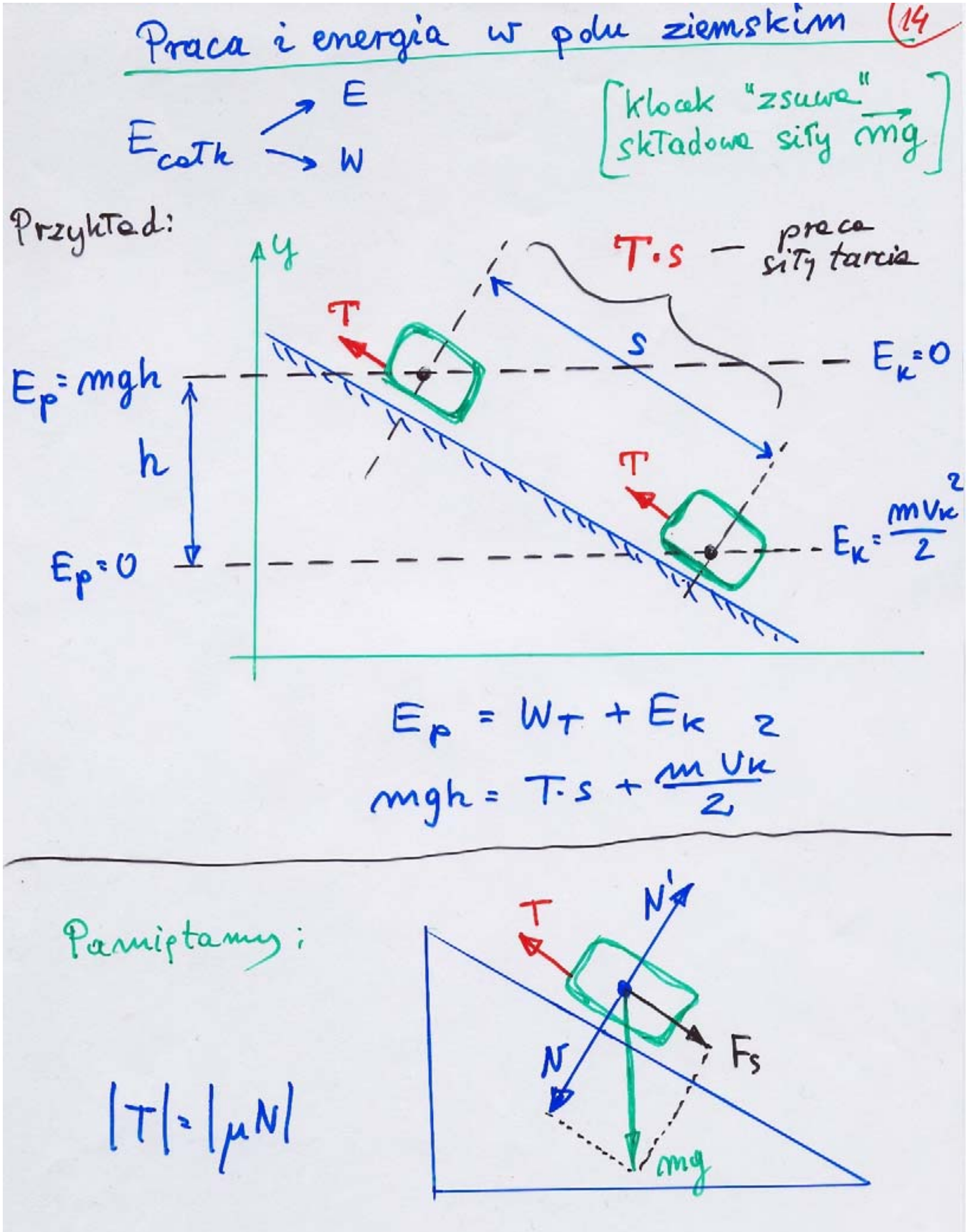
rzut do góry i spadek swobodny

$E = E_k = \frac{mv_0^2}{2}$



$$mgh = \frac{mv_0^2}{2}$$

Zasada zachowania energii_2



Praca i energia w polu ziemskim

Zasada zachowania pędu

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU (22)

Kolejny raz patrzymy na II zas. Newtona

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

Dla $m = const$

$$\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \Delta\vec{v} = \vec{v}_k - \vec{v}_p$$

$$\boxed{\underbrace{\vec{F}\cdot\Delta t}_{\text{impuls siły}} = \underbrace{m\vec{v}_k - m\vec{v}_p}_{\text{zmiana pędu}}} \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$

gdy $\vec{F}_z = 0$ (wypadkowa sił "zewnętrznych")

$$m\vec{v}_k - m\vec{v}_p = 0$$

$$\vec{p}_k - p_p = 0 \qquad \boxed{\Delta\vec{p} = 0}$$

$$\boxed{\vec{p}_k = \vec{p}_p}$$

Uogólnienie

Jeżeli na wyodrębniony układ ciał nie działają siły zewnętrzne to całkowity pęd układu nie zmienia się (jest zachowany)

(pęd jest wektorem!)

Zderzenia

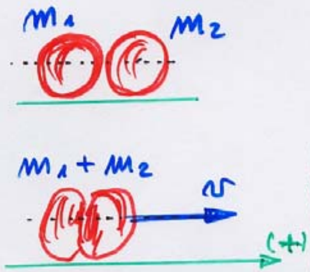
ILUSTRACJA DOŚWIADCZALNA ZZP

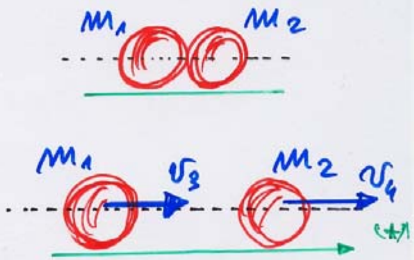
– centralne zderzenia ciał

niesprężyste | sprężyste

w trakcie zderzenia

w efekcie zderzenia





ZZP: $\vec{p}_P = \vec{p}_K$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\, v$$

ZZE:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1+m_2)v^2}{2} + Q$$

ciepło

ZZE (energii mechanicznej) nie spełniona!!!

ZZP: $\vec{p}_P = \vec{p}_K$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_3 + m_2 v_4$$

ZZE:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_3^2}{2} + \frac{m_2 v_4^2}{2}$$

ZZE (energii mechanicznej) spełniona!

ZZE i ZZP dla układu punktów materialnych

– całkowita energia (uwzględnia zachowania się wszystkich punktów mater. tworzących układ)

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}$$

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} E_{pi}$$

$$E_c = E_k + E_p$$

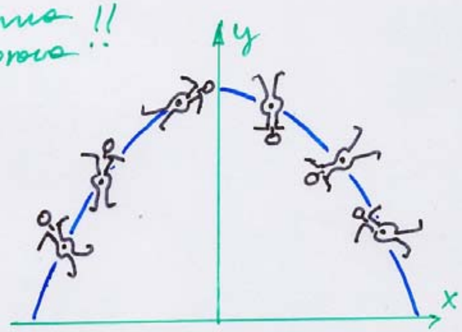
Są to sumy algebraiczne !!!

– całkowity pęd

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$$

suma wektorowa !!

Do opisu analitycznego używamy współrzędnych środka masy:



$$x_{śr.m.} = \frac{1}{M}\sum m_i x_i\,,\quad y_{śr.m.} = \frac{1}{M}\sum m_i y_i\,,\quad z_{śr.m.} = \frac{1}{M}\sum m_i z_i$$

lub: $\frac{1}{M}\int x\,dm \qquad \frac{1}{M}\int y\,dm \qquad \frac{1}{M}\int z\,dm \qquad M = \sum m_i$

wtedy: $M\vec{a}_{śr.m.} = \vec{F}_{zew} \qquad \left(\vec{F}_{zew} = \frac{d\vec{P}}{dt}\right)$

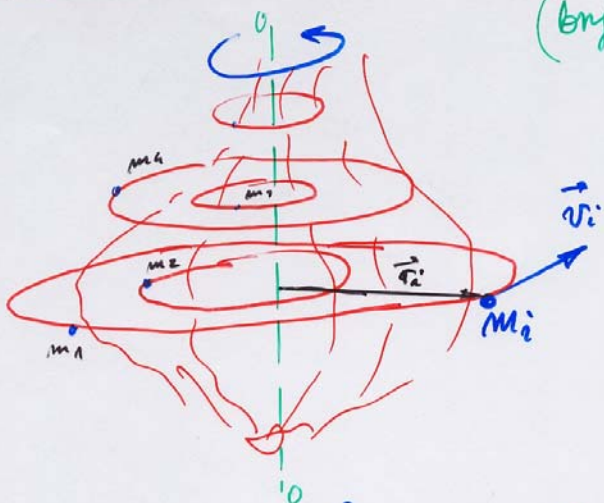
Środek masy układu punktów porusza się tak, jakby cała masa układu była skupiona w śr. masy i jakby wszystkie siły zewnętrzne działały na śr. masy.

zze i zzp dla układu punktów materialnych

Energia układu punktów materialnych

ENERGIA UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH (25)

(bryła sztywna wiruje)



$$E_{Ki} = \frac{m_i v_i^2}{2} = \frac{m_i (r_i \omega)^2}{2}$$

$$E_K = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2$$

I moment bezwładności

$$\boxed{E_K = I \frac{\omega^2}{2}}$$

Moment pędu:

$$L = \sum r_i m_i v_i = \sum m_i r_i^2 \omega$$

df.:

$$\boxed{\vec{L}_i = \vec{r} \times m_i \vec{v}_i}$$

$$L = I \cdot \omega$$

$$\boxed{\vec{L} = I \vec{\omega}}$$