Algebra- przestrzenie wektorowe

J.Janus, M.Luśtyk

Przestrzeń wektorowa.

Definicja Przestrzeni wektorowej.
Przestrzeń wektorowa nad zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ zawiera zbiór wektorów V w którym określone jest działanie dodawania wektorów '+' i działanie mnożenia wektora przez liczbę '$\cdot$'. Dla dowolnych wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in V$ i dowolnych skalarów r, $s \in \mathbb{R}$ muszą być spełnione nastepujące warunki:

1. Zbiór V jest zamknięty ze względu na operacje dodawania
$$\vec{u} + \vec{v} \in V.$$
2. Przemieność dodawania wektorów
$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}.$$
3. Łączność dodawania wektorów
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}.$$
4. Istnieje wektor zerowy $\vec{0}$ taki, że
$$\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}, \quad \text{dla dowolnego} \quad \vec{u}.$$
5. Dla każdego $\vec{u}$ istnieje wektor przeciwny $\vec{w} \in V$ taki, że
$$\vec{u} + \vec{w} = \vec{0}.$$
6. Zbiór V jest zamknięty ze względu na operacje mnożenia wektora przez skalar
$$r \cdot \vec{u} \in V.$$
7. Rozdzielność mnożenia względem dodawania skalarów
$$(r + s) \cdot \vec{u} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{u}.$$

8. Rozdzielność mnożenia względem dodawania wektorów

$$r \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = r \cdot \vec{u} + r \cdot \vec{v}.$$

9. łączność mnożenia

$$(rs) \cdot \vec{u} = r \cdot (s \cdot \vec{u}).$$

10. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Analogicznie można określić przestrzestrzeń wektorową nad zbiorem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.
Uwaga 1. Wektor zerowy $\vec{0}$ w przestrzeni wektorowej określony jest jednoznacznie. Dla dowolnego wektora $\vec{u}$ istnieje dokładnie jeden wektor przeciwny $\vec{w}$.
Podam teraz przykłady przestrzeni wektorowych.

Przykład 1. Zbiór

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \ldots n\}$$

nad $\mathbb{R}$ z działaniami określonymi następująco

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$r \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (rx_1, rx_2, \ldots, rx_n).$$

Jest przestrzenią wektorową

Przykład 2. Zbiór funkcji

$$V = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\}$$

z działaniami dodawania i mnożenia przez skalar

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (r \cdot f)(x) = rf(x).$$

jest przestrzenią wektorową.

Definicja Podprzestrzeni wektorowej. Niech V bedzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$ i $U \subset V$. Mówimy, że U jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V jezeli zbiór U jest zamkniety na operacje dodawania wektorów i mnożenia wektórów przez liczbę tj. dla dowolnych $u, v \in U$ i dowolnego $r \in \mathbb{R}$ ($r \in \mathbb{C}$)

$$u + v \in U, \quad r \cdot u \in U. \tag{1}$$

Inaczej mówiąc podprzestrzeń wektorowa U jest przestrzenią wektorową z tymi samymi działaniami jak w V.

Uwaga 2. Niech U będzie podzbiorem pewnej przestrzeni wektorowej V. Chcąc wykazać, że U jest przestrzenią wektorową z działaniami takimi jak w V, wystarczy sprawdzić warunki (1) zamiast dziesięć punktów z definicji przestrzeni wektorowej.

Przykład 3. Wykazać, że zbiór

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

z działaniami jak w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ jest przestrzenią wektorową. Wystarczy pokazać, że dla dowolnych (x_1, x_2, x_3), $(y_1, y_2, y_3) \in U$ i dowolnego $r \in \mathbb{R}$ spełnione są zależności (1).

Ponieważ

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$

i uwzględniając fakt, że

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

mamy

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 = 0$$

co oznacza, że suma dwóch wektorów z U należy do U. Ponieważ

$$r \cdot (x_1, x_2, x_3) = (rx_1, rx_2, rx_3)$$

i $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ więc $rx_1 + rx_2 + rx_3 = 0$. Stąd wynika, że $r \cdot (x_1, x_2, x_3) \in U$ i dla zbioru U zależności (1) są spełnione.

Przykład 4. Wykazać, że zbiór wielomianów stopnia co najwyżej n

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 : \quad a_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, \ldots, n\}$$

z działaniami dodawania i mnożenia przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią wektorową.
Ponieważ zbiór $\mathbb{R}_n[x]$ jest podzbiorem przestrzeni wektorowej
$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ więc wystarczy pokazać, że zbiór $\mathbb{R}_n[x]$ jest zamkniety na operacje dodawania i mnożenia przez skalar.
Wynika to faktu, że suma wielomianów stopnia co najwyżej n jest wielomianem stopnia co najwyżej n i iloczyn wielomian stopnia co najwyżej n przez liczbę rzeczywistą jest wielomianem stopnia co najwyżej n.

Przykład 5. Wykazać, że zbiór rozwiązań równania różniczkowego rzędu n-tego o stałych współczynnikach jest przestrzenią wektorową.
Zbiór $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ z działaniami '+' dodawania funkcji i '$\cdot$' mnożenia funkcji przez skalar jest przestrzenia wektorową nad $\mathbb{R}$. Niech

$$U = \{x(t) : \ a_n x^{(n)}(t) + \cdots + a_{n-1}x'(t) + a_0 x(t) = 0\}$$

gdzie funkcje $x(t)$ są n-krotnie różniczkowalne.
Ponieważ $U \subset V$ więc wystarczy pokazać, że zbiór U jest zamknięty na operacje dodawania i mnożenia przez skalar.
Niech $x(t)$, $y(t) \in U$ uwzględniając , że $(x(t) + y(t))^{(k)} = x^{(k)}(t) + y^{(k)}(t)$ i $(r \cdot x(t))^{(k)} = r \cdot x^{(k)}(t)$ mamy, że $x(t) + y(t) \in U$ co kończy dowód przykładu.

Liniowa niezależność wektorów.

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ lub ($\mathbb{C}$).
Definicja liniowej niezależności . Mówimy, że wektory $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n} \in V$ są liniowo niezależne jeżeli

$$r_1 \cdot \vec{v_1} + r_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + r_n \cdot \vec{v_n} = \vec{0} \iff r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0.$$

Definicja span$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$.

$$\mathbf{span}\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\} = \{r_1 \cdot \vec{v_1} + r_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + r_n \cdot \vec{v_n}, \quad r_1, \ldots r_n \in \mathbb{R}\}.$$

Nietrudno pokazać, że **span**$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ jest przestrzenią wektorową.

Definicja generowania . Mówimy, że wektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n} \in V$ generują przestrzeń V jeżeli dla dowolnego wektora $\vec{v}$ istnieją skalary $r_1, \ldots, r_n$ takie, że

$$\vec{v} = r_1 \cdot \vec{v_1} + r_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + r_n \cdot \vec{v_n}.$$

Definicja bazy . Mówimy, że wektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n} \in V$ stanowią bazę przestrzeni V jeżeli:

1. są liniowo niezależne
2. generują przestrzeń V

W przestrzeni wektorowej V baza nie jest określona jednoznacznie, to znaczy w danej przestrzeni wektorowej można określić wiele różnych baz.

Uwaga 2. Niech $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ będzie bazą przestrzeni V. Wtedy dla dowolnego wektora $\vec{v}$ istnieją liczby $r_1, r_2, \ldots, r_n$ takie, że

$$\vec{v} = r_1 \cdot \vec{v_1} + r_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + r_n \cdot \vec{v_n}.$$

Liczby $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nazywamy współrzędnymi wektora v w bazie $\mathcal{B}$ i będziemy ozncząć $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (r_1, \ldots, r_n)$. Dla danej bazy współrzędne wektora określone są jednoznacznie.
Istotnie, przypuśćmy, że istnieją inne liczby $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \ldots, \tilde{r}_n$ takie, że

$$\vec{v} = \tilde{r}_1 \cdot \vec{v_1} + \tilde{r}_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + \tilde{r}_n \cdot \vec{v_n}.$$

Ponieważ

$$0 = \vec{v} - \vec{v} = (\tilde{r}_1 - r_1) \cdot \vec{v_1} + (\tilde{r}_2 - r_2) \cdot \vec{v_2} + \cdots (\tilde{r}_n - r_n) \cdot \vec{v_n},$$

więc z liniowej niezależności wektorów $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ mamy, że współrzędne $\tilde{r}_i - r_i,\ i = 1, \ldots, n$ są równe zero, co dowodzi jednoznaczności współrzędnych. Stąd wynika, że odwzorowanie

$$V \ni v \to [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$$

jest wzajemnie jednoznaczne.

Przykład 6. Zbiór wektorów

$$\vec{v_1} = (1, 0, 1),\ \vec{v_2} = (0, 2, 1),\ \vec{v_3} = (-1, 1, 0) \tag{2}$$

jest bazą w przestrzeni.

1. Sprawdzamy liniową niezależność.

   Bierzemy kombinacje wektorów i przyrównujemy do zera

   $$r_1 \cdot \vec{v_1} + r_2 \cdot \vec{v_2} + r_3 \cdot \vec{v_3} = \vec{0} = (0, 0, 0).$$

   Stąd

   $$r_1(1, 0, 1)+r_2(0, 2, 1)+r_3(-1, 1, 0) = (r_1-r_3, 2r_2+r_3, r_1+r_2) = (0, 0, 0).$$

   Stąd otrzymujemy układ równań

   $$\begin{cases} r_1 - r_3 = 0 \\ 2r_2 + r_3 = 0 \\ r_1 + r_2 = 0 \end{cases}$$

   który posiada dokładnie jedno rozwiązanie zerowe tj. $r_1 = r_2 = r_3 = 0$.

   `https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+r_1-r_3%3D0,2*r_2%2Br_3%3D0,r_1%2Br_2%3D0`

2. Sprawdzamy generowanie.

   Bierzemy dowolny wektor $\vec{v} = (x, y, z)$. Pokażemy, że istnieją liczby r_1, r_2, r_3 takie, że

   $$\vec{v} = (x, y, z) = r_1(1, 0, 1)+r_2(0, 2, 1)+r_3(-1, 1, 0) = (r_1-r_3, 2r_2+r_3, r_1+r_2).$$

   Stąd otrzymujemy układ równań

   $$\begin{cases} r_1 - r_3 = x \\ 2r_2 + r_3 = y \\ r_1 + r_2 = z \end{cases}$$

   Którego rozwiązaniem są liczby

   $$r_1 = 2z - x - y, \ r_2 = x + y - z, \ r_3 = 2z - 2x - y.$$

   `https://www.wolframalpha.com/input/?i=solve+%5B%7Br_1-r_3%3Dx,2*r_2%2Br_3%3Dy,r_1%2Br_2%3Dz%7D,%7Br_1,r_2,r_3%7D%5D`

   Liczby te są współrzednymi wektora $\vec{v}$ w bazie (2).

Baza kanoniczna w $\mathbb{R}^n$.
Bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^n$ nazywamy bazę

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \quad \text{gdzie} \quad e_i = (0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0), \ i = 1, \ldots, n.$$

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ bazę kanoniczną oznaczamy

$$\mathcal{B} = \{\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\} \quad \text{gdzie} \quad \vec{i} = (1,0,0),\ \vec{j} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1).$$

Definicja wymiaru przestrzeni wektorowej. Wymiar przestrzeni wektorowej określa liczba wektorów bazowych i oznaczamy $\dim V$

Uwaga 3. Są przestrzenie które mają wymiar nieskończony np. zbiór wielomianów dowolnego stopnia o współczynnikach rzeczywistych $\mathbb{R}[x]$. Bazą kanoniczną tej przestrzeni jest zbiór funkcji

$$\mathcal{B} = \{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\}.$$

Definicja liniowej zależności zbioru funkcji
Mówimy, że **zbiór funkcji** $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ określonych na przedziale $I \subset \mathbb{R}$ jest **liniowo zależny**, jeżeli istnieją stałe $c_1, \ldots, c_n$ nie wszystkie równe zero, takie że $c_1 f_1(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0$, dla każdego $t \in I$.

Definicja liniowej niezależności zbioru funkcji
Mówimy, że **zbiór funkcji** $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ określonych na przedziale I jest **liniowo niezależny** jeśli nie jest liniowo zależny. Inaczej mówiąc, równość $c_1 f_1(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0$ zachodzi dla każdego $t \in I$ jedynie w przypadku, gdy wszystkie współczynniki $c_i,\ i = 1, \ldots, n$ są równe zero.

Twierdzenie 1.
ZAŁOŻENIA: Zakładamy, że funkcje $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ określone na przedziale $I \subset \mathbb{R}$ są $n-1$ krotnie różniczkowalne i wyznacznik

$$\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & \ldots & f_n(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & \ldots & f_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & f_2^{(n-1)}(t) & \ldots & f_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

nie jest równy zero przynajmniej dla jednego t z przedziału I.

TEZA:
Wtedy funkcje $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ są liniowo niezależne. Powyższy wyznacznik będziemy oznaczać $W[f_1(t), \ldots, f_n(t)]$ i nazywać **Wrońskianem**, inaczej **wyznacznikiem macierzy Wrońskiego**.
DOWÓD:
Dowód twierdzenia podamy w przypadku, gdy $n = 2$. Dla większych n dowód jest podobny. Zakładamy, że istnieje $t_0 \in I$, dla którego

$$W[f_1(t_0), f_2(t_0)] \neq 0.$$

Dla dowodu nie wprost zakładamy, że funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są liniowo zależne. To oznacza, że istnieją stałe c_1, c_2 jednocześnie nie równe zero takie, że dla każdego $t \in I$ zachodzi równość

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) = 0. \tag{3}$$

Różniczkując stronami równość (3) dostajemy

$$c_1 f_1'(t) + c_2 f_2'(t) = 0. \tag{4}$$

Dla $t = t_0$, z równości (3) i (4) otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} c_1 f_1(t_0) + c_2 f_2(t_0) = 0 \\ c_1 f_1'(t_0) + c_2 f_2'(t_0) = 0 \end{cases}$$

o niewiadomych c_1 i c_2, dla którego wyznacznik $W[f_1(t_0), f_2(t_0)] \neq 0$. Zatem układ ten posiada jedynie rozwiązanie zerowe $c_1 = 0$ i $c_2 = 0$, co jest sprzeczne z założeniem, że c_1 i c_2 nie są jednocześnie równe zero. Oznacza to, że funkcje $f_1(t)$ i $f_2(t)$ są liniowo niezależne.

Wniosek 1.
Jeżeli funkcje $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ są $n-1$ - krotnie różniczkowalne na I i są liniowo zależne, to $W[f_1(t), \ldots, f_n(t)] = 0$, dla każdego $t \in I$.

Uwaga 4.
Z tego, że wrońskian dla funkcji $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ jest równy zero dla każdego $t \in I$ nie wynika, że funkcje $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ są liniowo zależne. Na przykład: funkcje $f_1(t) = t^2$, $f_2(t) = t|t|$ są różniczkowalne w $\mathbb{R}$ i $W[f_1(t), f_2(t)] =$

0, dla każdego $t \in \mathbb{R}$. Funkcje te są liniowo niezależne, ponieważ nie istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że $f_1(t) = cf_2(t)$, dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Przykład 7. Pokazać, że funkcje $f_1(t) = t$, $f_2(t) = \sin t$, $f_3(t) = \cos t$ są liniowo niezależne. Liczymy wrońskianin $W[f_1(t),\, f_2(t),\, f_3(t)]$:

$$W[f_1(t),\, f_2(t),\, f_3(t)] = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) & f_3'(t) \\ f_1''(t) & f_2''(t) & f_3''(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & \sin t & \cos t \\ 1 & \cos t & -\sin t \\ 0 & -\sin t & -\cos t \end{vmatrix} = -t.$$

`https://www.wolframalpha.com/input/?i=Wronskian%5B%7Bt,sin+t,cos+t%7D,t%5D`
Ponieważ wrońskianin jest różny od zera więc funkcje są liniowo niezależne.

Zmiana bazy

Rozważmy następujący problem. Jeżeli $\vec{v}$ jest wektorem w skończenie wymiarowej przestrzeni V i jeżeli zmienimy bazę w V z bazy $\mathcal{B}$ na bazę $\mathcal{B}'$ to jaka jest zależność między współrzędnymi $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ i $[\vec{v}]_{\mathcal{B}'}$.
Niech V- będzie przestrzenią wektorową skończenie wymiarową i niech $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ będzie starą bazą i niech $\mathcal{B}' = \{\vec{v_1}', \dots, \vec{v_n}'\}$ będzie nową bazą w V.
Ponieważ dla każdego $i = 1, \dots, n$

$$[\vec{v_i}']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

więc

$$\vec{v_i}' = c_{1i}\vec{v_1} + c_{2i}\vec{v_2} + \dots + c_{ni}\vec{v_n}. \tag{6}$$

Niech $\vec{v}$- będzie dowolnym wektorem z V i niech

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \tag{7}$$

(8) $$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Z (6) i (7) mamy

$$\begin{aligned}\vec{v} =& x'_1\vec{v_1}' + \ldots + x'_n\vec{v_n}' = x'_1(c_{11}\vec{v_1} + c_{21}\vec{v_2} + \cdots + c_{n1}\vec{v_n}) + \cdots + x'_n(c_{1n}\vec{v_1} + c_{2n}\vec{v_2} + \cdots + c_{nn}\vec{v_n}) \\ =& (x'_1c_{11} + \cdots + x'_nc_{1n})\vec{v_1} + \cdots + (x'_1c_{n1} + \cdots + x'_nc_{nn})\vec{v_n}.\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$\vec{v} = x_1\vec{v_1} + \ldots + x_n\vec{v_n}.$$

Zatem

(9) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1c_{11} + \cdots + x'_nc_{1n} \\ \vdots \\ x'_1c_{n1} + \cdots + x'_nc_{nn} \end{pmatrix}.$$

Niech

$$P = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wtedy zależność (9) można zapisać następująco:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

lub krócej

(10) $$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = P \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}'}.$$

Macierz P nazywamy macierzą przejścia z bazy $\mathcal{B}'$ do bazy $\mathcal{B}$. I będziemy oznaczać $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$. Kolumnami macierzy $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ są kolejno współrzędne wektorów $[\vec{v_1}']_{\mathcal{B}}$, $[\vec{v_2}']_{\mathcal{B}}$, ..., $[\vec{v_n}']_{\mathcal{B}}$.

Uwaga 5. Ponieważ wektory $\{\vec{v_1}', \ldots, \vec{v_n}'\}$ są liniowo niezależne więc również wektory współrzednych $\{[\vec{v_1}']_{\mathcal{B}}, \ldots, [\vec{v_n}']_{\mathcal{B}}\}$ są liniowo niezależne co oznacza,

że kolumny macierzy $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ są liniowo niezależne. Stąd wynika, że rząd macierzy $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ jest równy n i macierz $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ jest odwracalna.
Macierz odrotna do $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}}$ jest macierzą przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do bazy $\mathcal{B}'$ i będziemy oznaczać $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$. Stąd

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}. \tag{11}$$

Algorytm wyznaczania macierzy przejścia $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$ dla wektorów w $\mathbb{R}^n$.
Niech $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ będzie starą bazą w $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{B}' = \{\vec{v_1}', \dots, \vec{v_n}'\}$ będzie nową bazą w $\mathbb{R}^n$. Definiujemy macierz

$$[\text{nowa baza} \mid \text{stara baza}] \tag{12}$$

kolumnami tej macierzy są współrzędne wektorów bazowych.
Wykonując operacje elementarne na wierszach (mnożenie wierszy przez liczbę, dodawanie wierszy i odejmowanie wierszy) na macierzy (12) przekształcamy ją do postaci:

$$[I \mid P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}],$$

gdzie I jest macierzą jednostkową.

Uwaga 6. Niech $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ będzie dowolną bazą w $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{K} = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ bazą kanoniczna w $\mathbb{R}^n$. Dla dowolnego wektora $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ istnieją jednoznacznie określone współrzędne $(x_1', x_2', \dots, x_n')$ w bazie $\mathcal{B}$

$$\vec{v} = x_1'\vec{v_1} + \ldots + x_n'\vec{v_n}. \tag{13}$$

Niech

$$[\vec{v}]_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [\vec{v_i}]_{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zależność (13) możemy zapisać następująco:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1' \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n' \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że macierz przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do $\mathcal{K}$ ma postać

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Kolumny tej macierzy są współrzędnymi wektorów $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ w bazie kanonicznej.

Uwaga 7. Niech $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}\}$ i $\mathcal{B}' = \{\vec{v_1}', \dots, \vec{v_n}'\}$ będą bazami w $\mathbb{R}^n$. Wtedy macierz przejścia z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{B}'$ można wyznaczyć następująco:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{K}} \cdot P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} \tag{14}$$

gdzie macierze $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}}$ i $P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{K}}$ wyznaczamy jak w Uwadze 6.
Dowód. Niech $\vec{v}$ bedzie dowolnym wektorem w V. Ponieważ

$$[\vec{v}]_{\mathcal{K}} = P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{K}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}'} \tag{15}$$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{K}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \tag{16}$$

więc z (15) mamy

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{K}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{K}}. \tag{17}$$

Podstawiając do (17) zależność z (16) dostajemy

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}_{\mathcal{B}'\to\mathcal{K}} \cdot P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}.$$

Stąd wynika, że macierz przejścia z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{B}'$ jest określona zależnością (14).

Przykład 8. Rozważmy bazy $\mathcal{B} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ i $\mathcal{B}' = \{\vec{v_1}', \vec{v_2}'\}$ w $\mathbb{R}^2$ gdzie

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{v_1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{v_2}' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Znaleźć macierz przejścia z $\mathcal{B}$ do $\mathcal{B}'$.
2. Znaleźć macierz przejścia z $\mathcal{B}'$ do $\mathcal{B}$.

3. Policzyć współrzędne wektora $[\vec{w}]_{\mathcal{B}}$ gdzie

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

4. Policzyć współrzędne wektora $[\vec{w}]_{\mathcal{B}'}$.

Rozwiązanie.
Ad.1.
W tym przypadku $\mathcal{B}$ jest starą bazą a $\mathcal{B}'$ nową bazą

$$[\text{nowa baza} \mid \text{stara baza}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 2 & 4 \\ 3 & -1 & | & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wykonując przekształcenia elementarne na powyższej macierzy otrzymamy

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 2 & 4 \\ 3 & -1 & | & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{-3W_1+W_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 2 & 4 \\ 0 & 2 & | & -4 & -13 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}W_2}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 2 & 4 \\ 0 & 1 & | & -2 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix} \overset{W_2+W_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & | & -2 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

Macierz tą można również wyznaczyć korzystając z zależności (14). W naszym przypadku

$$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

`https://www.wolframalpha.com/input/?i=inverse(%7B%7B1,-1%7D,%7B3,-1%7D%7D).%7B%7B2,4%7D,%7B2,-1%7D%7D`

Ad.2.
W tym przypadku $\mathcal{B}'$ jest starą bazą a $\mathcal{B}$ nową bazą

$$[\text{nowa baza} \mid \text{stara baza}] = \begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 1 & -1 \\ 2 & -1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wykonując przekształcenia elementarne na powyższej macierzy otrzymamy

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 1 & -1 \\ 2 & -1 & | & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{-W_1+W_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 1 & -1 \\ 0 & -5 & | & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{W_1/2,\ -W_2/5}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & | & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \overset{-2W_2+W_1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & | & -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zatem

$$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz tą można również wyznaczyć korzystając z uwagi 5. W naszym przypadku

$$P_{\mathcal{B}'\to\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

`https://www.wolframalpha.com/input/?i=inverse%7B%7B0,-5%2F2%7D,%7B-2,-13%2F2%7D%7D`

Ad.3.

Ponieważ

$$[\vec{w}]_{\mathbb{K}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

zatem z (11) mamy zależność

$$[\vec{w}]_{\mathbb{B}} = P_{\mathcal{K}\to\mathcal{B}} \cdot [\vec{w}]_{\mathbb{K}}. \tag{18}$$

Z uwagi 6 mamy

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Uwzględniając fakt, że

$$P_{\mathcal{K}\to\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

`https://www.wolframalpha.com/input/?i=inverse%7B%7B2,4%7D,%7B2,-1%7D%7D`

zależność (18) ma postać

$$[\vec{w}]_{\mathbb{B}} = P_{\mathcal{K}\to\mathcal{B}} \cdot [\vec{w}]_{\mathbb{K}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{10} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix}.$$

`https://www.wolframalpha.com/input/?i=%7B%7B1%2F10,+2%2F5%7D,+%7B1%2F5,+-1%2F5%7D%7D.%7B%7B3%7D,%7B-5%7D%7D`

Wektor $\vec{w}$ w bazie $\mathbb{B}$ można zapisać następująco

$$\vec{w} = -\frac{17}{10}\vec{v_1} + \frac{8}{5}\vec{v_2}.$$

Ad.4.
Ponieważ

$$[\vec{w}]_{\mathbb{B}'} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} \cdot [\vec{w}]_{\mathbb{B}}$$

więc z punktu 1 i 3 mamy

$$[\vec{w}]_{\mathbb{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} \\ -2 & -\frac{13}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{17}{10} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

`https://www.wolframalpha.com/input/?i=%7B%7B0,-5%2F2%7D,%7B-2,-13%2F2%7D%7D.%7B%7B-17%2F10%7D,%7B8%2F5%7D%7D`
Wektor $\vec{w}$ w bazie $\mathbb{B}'$ można zapisać następująco

$$\vec{w} = -4\vec{v_1}' - 7\vec{v_2}'.$$

Odwzorowanie liniowe.
Definicja odwzorowania liniowego. Odwzorowanie $L : V \to W$ jest liniowe jeżeli V i W są przestrzeniami wektorowymi i spełnione są następujące warunki:

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2), \quad L(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot L(v)$$

dla dowolnych v_1, v_2, $v \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definicja jadra. Jądrem odwzorowania liniowego nazywamy zbiór:

$$\ker L = \{v \in V : \ L(v) = 0\}.$$

Jądro jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V. Istotnie dla dowolnych v_1, $v_2 \in \ker L$, $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = 0$ i dla dowolnego $v \in V$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $L(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot L(v) = \lambda \cdot 0 = 0$. Zatem $\ker L$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V.

Definicja obrazu. Obrazem odwzorowania liniowego nazywamy zbiór:

$$\operatorname{im} L = \{w \in W : \ istnieje \ v \in V, \ \ L(v) = w\}.$$

Obraz jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni W. Istotnie dla dowolnych w_1, $w_2 \in \mathrm{i}m\, L$ istnieją v_1, $v_2 \in V$ takie, że $L(v_1) = w_1$, $L(v_2) = w_2$ stąd wynika, że $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) = w_1 + w_2$, zatem $w_1 + w_2 \in \mathrm{i}m\, L$. Analogicznie dla $w \in W$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ istnieje $v \in V : L(v) = w$ stąd $L(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot L(v) = \lambda \cdot w$, zatem $\lambda \cdot w \in \mathrm{i}m\, L$ co kończy dowód, że $\mathrm{i}m\, L$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni W.

Uwaga 8.

1. Jeżeli $\ker L = \{0\}$ to odwzorowanie L- jest różnowartościowe i nazywamy je **monomorfizmem**.
2. Jeżeli $\mathrm{i}m\, L = W$ to odwzorowanie L- jest na cały zbiór W i nazywamy je **epimorfizmem**.
3. Jeżeli $\ker L = \{0\}$ i $\mathrm{i}m\, L = W$ to odwzorowanie L- jest wzajemnie jednoznaczne i nazywamy je **izomorfizmem**.
4. Odwzorowanie liniowe $L : V \to V$- nazywamy endomorfizmem.

Definicja macierzy odwzorowania liniowego. Jeżeli V i W są skończenie wymiarowymi przestrzeniami wektorowymi w których mamy bazy:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{w_1, \dots, w_k\}.$$

Wartości $L(v_1), \dots, L(v_n)$ można zapisać w bazie $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ następująco:

$$\begin{cases} L(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{k1}w_k \\ L(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{k2}w_k \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ L(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{kn}w_k \end{cases}$$

Macierz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

nazywamy macierzą odwzorowania liniowego w bazach $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$.

Uwaga 9. Jeżeli dla dowolnego wektora $v \in V$

$$[v]_{\mathcal{B}_{\mathcal{V}}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad [L(v)]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

wtedy

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Uwaga 10.
Jeżeli odwzorowanie $L : V \to W$ jest izomorfizmem a przestrzenie wektorowe V i W są skończenie wymiarowe to macierz odwzorowania odwrotnego $L^{-1} : W \to V$ jest macierza odwrotną do macierzy odwzorowania L.
Jeżeli $U,\ V$ i W są przestrzeniami skończenie wymiarowymi z bazami $\mathcal{B}_{\mathcal{U}},\ \mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ i odwzorowania liniowe

$$L : U \to V, \quad T : V \to W$$

mają odpowiednio macierze A i B. Wtedy złożenie tych odwzorowań $T \circ L : U \to W$ ma macierz $C = B \cdot A$.

Przykład 9. Przykłady odwzorowań liniowych.

1. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gdzie

$$L(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1 + x_3,\ x_1 - 2x_2 + x_4,\ x_2 + 2x_3 - x_4,\ x_2 + 2x_3).$$

2. Niech $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{dowolnie razy różniczkowalne}\}$ i niech

$$L : V \ni f \to f'' \in V.$$

3. Niech $V = \{f : [a,\, b] \to \mathbb{R},\ \text{ciągłe}\}$ i niech

$$L : V \ni f \to \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

Przykład 10. Niech $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym określonym następująco:

$$L(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2,\, 2x_2 + x_3).$$

Dla odwzorowania L wyznaczyć $\ker L$, $\operatorname{im} L$ i macierz odwzorowania w bazach kanonicznych.

1. Wyznaczamy $\ker L$.

$$\ker L = \{(x_1,\, x_2,\, x_3): \;\; L(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_1{+}x_2{+}x_3, -x_1{+}x_2,\, 2x_2{+}x_3) = (0,0,0)\}.$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Układ ten rozwiązemy metodą Gaussa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{W_1+W_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \overset{-W_2+W_3}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ rząd macierzy układu jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej i wynosi 2. Więc układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru, za parametr przyjmujemy x_3. Układ równoważny naszemu układowi ma postać :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Stąd

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3, \quad x_1 = -x_2 - x_3 = -\frac{1}{2}x_3$$

Zatem

$$\ker L = \{(-\frac{1}{2}x_3,\, -\frac{1}{2}x_3,\, x_3),\;\; x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(-\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2},\, 1)x_3,\;\; x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Wymiar jądra jest równy jeden bo jest generowane przez jeden wektor.

2. Wyznaczamy $\mathrm{im}L$.

   $\mathrm{im}L = \{(w_1,\ w_2,\ w_3):\ \ L(x_1,\ x_2,\ x_3) = (x_1{+}x_2{+}x_3, -x_1{+}x_2,\ 2x_2{+}x_3) = (w_1, w_2, w_3)\}.$

   Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = w_1 \\ -x_1 + x_2 = w_2 \\ 2x_2 + x_3 = w_3 \end{cases}$$

   Musimy określić dla jakich $(w_1,\ w_2,\ w_3)$ układ posiada rozwiązanie ze wzgledu na $(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Będziemy rozwiązywać ten układ metodą Gaussa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & w_1 \\ -1 & 1 & 0 & | & w_2 \\ 0 & 2 & 1 & | & w_3 \end{pmatrix} \overset{W_1+W_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & w_1 \\ 0 & 2 & 1 & | & w_1 + w_2 \\ 0 & 2 & 1 & | & w_3 \end{pmatrix} \overset{-W_2+W_3}{\longrightarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & w_1 \\ 0 & 2 & 1 & | & w_1 + w_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & w_3 - w_1 - w_2 \end{pmatrix}.$$

   Układ ten będzie posiadał rozwiązanie, jeżeli rząd macierzy układu bedzie równy rzędowi macierzy uzupełnionej. Ponieważ rząd macierzy układu jest równy dwa to rząd macierzy uzupełnionej będzie dwa gdy

$$w_3 - w_1 - w_2 = 0.$$

   Stąd $w_3 = w_1 + w_2$ i

   $\mathrm{im}L = \{(w_1,\ w_2,\ w_1{+}w_2) = (1,0,1)w_1{+}(0,1,1)w_2 \quad \text{gdzie}\ \ w_1, w_2 \in \mathbb{R}\}.$

   Wymiar obrazu jest równy dwa bo jest generowany przez dwa liniowo niezależne wektory $(1,0,1)$ i $(0,1,1)$.

3. Wyznaczamy macierz odwzorowania.

   Macierz odwzorowania wyznaczymy przy założeniu, że baza w $\mathbb{R}^3$ jest kanoniczna tj. $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$.

$$\begin{cases} L(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 = (a_{11},\ a_{21},\ a_{31}) \\ L(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 = (a_{12},\ a_{22},\ a_{32}) \\ L(e_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3 = (a_{13},\ a_{23},\ a_{33}) \end{cases}$$

   Ponieważ $L(e_1) = (1,-1,0)$, $L(e_2) = (1,1,2)$, $L(e_3) = (1,0,1)$.

Więc

$a_{11} = 1,\ a_{21} = -1,\ a_{31} = 0,\ a_{12} = 1,\ a_{22} = 1,\ a_{32} = 2,\ a_{13} = 1,\ a_{23} = 0,\ a_{33} = 1.$

Zatem macierz odwzorowania A ma postać

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uwaga 11. Macierz przejścia. Niech $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie dowolną bazą w $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{K} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ bazą kanoniczna w $\mathbb{R}^n$.
Rozpatrzmy odwzorowanie identycznościowe z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z bazą $\mathcal{B}$ do przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z bazą $\mathcal{K}$ będziemy to zapisywać następująco:

$$id:\ (\mathbb{R}^n,\ \mathcal{B}) \ni v \to v \in (\mathbb{R}^n,\ \mathcal{K}).$$

Jest to przekształcenie liniowe, wyznaczymy jego macierz.
Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$v_i = (c_{1i}, \ldots, c_{ni}), \quad e_i = (0, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, 0), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Wyznaczamy macierz odwzorowania:

$$\begin{cases} id(v_1) = (c_{11}, \ldots, c_{n1}) = c_{11}e_1 + \ldots + c_{n1}e_n \\ id(v_2) = (c_{12}, \ldots, c_{n2}) = c_{12}e_1 + \ldots + c_{n2}e_n \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ id(v_n) = (c_{1n}, \ldots, c_{nn}) = c_{1n}e_1 + \ldots + c_{nn}e_n \end{cases}$$

Zatem macierz tego odwzorowania P ma postać

$$P = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

i jest taka sama jak macierz $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}}$ w uwadze 6.
Stad wynika, że macierz przejścia z jednej bazy do drugiej jest to macierz odwzorowania identycznościowego.

Przykład 11. Niech $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym określonym następująco:

$$L(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_1).$$

Wyznaczyć macierz tego odwzorowania przyjmując, że w $\mathbb{R}^2$ mamy bazę

$$\mathcal{B}_1 = \{u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1)\}$$

a w $\mathbb{R}^3$ bazę

$$\mathcal{B}_2 = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 1)\}.$$

Odwzorowanie

$$L: (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2)$$

można zapisać jako złożenie następujących odwzorowań.

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \overset{id_1}{\to} (\mathbb{R}^2, \mathcal{K}_1) \overset{L}{\to} (\mathbb{R}^3, \mathcal{K}_2) \overset{id_2}{\to} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2)$$

gdzie $\mathcal{K}_1$ jest bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^2$ a $\mathcal{K}_2$ jest bazą kanoniczną w $\mathbb{R}^3$. Odwzorowanie id_1 ma macierz

$$P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{K}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

a macierz odwzorowania id_2 jest następująca

$$P_{\mathcal{K}_2 \to \mathcal{B}_2} = P^{-1}_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{K}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

`https://www.wolframalpha.com/input/?i=inverse%7B%7B1,1,1%7D,%7B1,1,0%7D,%7B1,0,0%7D%7D`

Wyznaczymy teraz macierz odwzorowania $L: (\mathbb{R}^2, \mathcal{K}_1) \to (\mathbb{R}^3, \mathcal{K}_2)$ którą będziemy oznaczać A'

$$\begin{cases} L(e_1) = (1, 1, 1)) = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3 \\ L(e_2) = (2, -1, 0) = 2e_1 - 1e_2 + 0e_3 \end{cases}$$

zatem

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oznaczmy macierz odwzorowania $L: (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2)$ przez A. Ponieważ odwzorowanie $L: (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_2)$ jest złożeniem odwzorowań

1. $id_1 : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{K}_1)$,
2. $L : (\mathbb{R}^2, \mathcal{K}_1) \to (\mathbb{R}^3, \mathcal{K}_2)$,
3. $id_2 : (\mathbb{R}^3, \mathcal{K}_2) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_2)$

Macierz A jest równa iloczynowi macierzy tych odwzorowań

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

`https://www.wolframalpha.com/input/?i=%7B%7B0,0,1%7D,%7B0,1,-1%7D,%7B1,-1,0%7D%7D.%7B%7B1,2%7D,%7B1,-1%7D,%7B1,0%7D%7D.%7B%7B1,1%7D,%7B1,-1%7D%7D`

Iloczyn skalarny.

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ i określone jest odwzorowanie

$$< \, , \, >: \; V \times V \to \mathbb{R}$$

takie, że dla dowolnego u, v, $w \in V$ i $k \in \mathbb{R}$ spełnione są warunki:

1. $< u + v, w > = < u, w > + < v, w >$
2. $< ku, w > = k < u, w >$
3. $< u, v > = < v, u >$
4. $< u, u > \geqslant 0$ i $< u, u > = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $u = 0$.

Odwzorowanie $< \, , \, >$ nazywamy iloczynem skalarnym.

Norma wektora.

W przestrzeni wektorowej V w której określony jest iloczyn skalarny definiuje sie normę wektora

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}.$$

Uwaga 12. Norma w V spełnia następujące warunki:

1. $\|v\| \geqslant 0$, $\|v\| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $v = 0$
2. $\|kv\| = |k|\|v\|$
3. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Kąt między wektorami.

$$\cos\alpha = \frac{< u, v >}{\|u\|\|v\|}.$$

Przyklady przestrzeni wektorowych z iloczynem skalarnym.

1. Przestrzeń Euklidesowa $\mathbb{R}^n$. Dla $u = (u_1, \dots, u_n)$ i $v(v_1, \dots, v_n)$
$$< u, v >= u_1v_1 + \cdots + u_nv_n.$$
2. $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ ciagłe}\}$, dla $f,\ g \in C[a, b]$
$$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Ortogonalność. Niech V będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym $< \ , \ >$. Mówimy, że wektory $u,\ v \in V$ są ortogonalne (prostopadłe) jeżeli $< u, v >= 0$.

Przykład 12.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 2, -3) \in V$
$$< u, v >= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 0.$$
2. $V = C[-\pi, \pi]$, $\sin t$, $\cos t \in V$
$$< sint, \cos t >= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cdot \cos t \, dt = \frac{1}{2}\Big(\sin^2(\pi) - \sin^2(-\pi)\Big) = 0.$$

Podprzestrzenie ortogonalne. Niech V przestrzeń wektorowa z iloczynem skalarnym $< \, , \, >$, S dowolny podzbiór V. Definiujemy nastepujący zbiór:

$$S^{\perp} = \{v \in V : < u, v >= 0 \quad \text{dla każdego } \; u \in S\}.$$

Pokażemy, że $S^{\perp}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V. Wystarcze pokazać, że zbiór ten jest zamknięty na operacje dodawania i mnożenia przez skalar. Niech v, $w \in S^{\perp}$ i $k \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$< v+w, u >=< v, u > + < w, u >= 0, \; < kv, u >= k < v, u >= 0 \text{ dla każdego } \; u \in S\}$$

co kończy dowód, że $S^{\perp}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V.

Twierdzenie 2. Jeżeli W podprzestrzeń wektorowa przestrzeni wektorowej V z iloczynem skalarnym $< \, , \, >$. Wtedy przestrzeń V można przedstawić jako sumę prostą podprzestrzeni W i $W^{\perp}$:

$$V = W \oplus W^{\perp} = \{v \in V : \; v = w + w^{\perp} \text{ gdzie } w \in W, \, w^{\perp} \in W^{\perp}\}, \; W \cap W^{\perp} = \{0\}.$$

Baza ortogonalna i ortonormalna.

Mówimy, że zbiór wektorów $\{u_1, \ldots, u_n\}$ w V jest bazą ortogonalną jeżeli jest bazą w przestrzeni V i spełniony jest warunek:

$$< u_i, u_j >= 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

Mówimy, że zbiór wektorów $\{u_1, \ldots, u_n\}$ w V jest bazą ortonormalną jeżeli jest bazą w przestrzeni V i spełniony jest warunek:

$$< u_i, u_j >= \delta_{ij} \quad \text{gdzie} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \; i = j \\ 0 & \text{dla } \; i \neq j \end{cases} \quad \text{i} \quad \|u_i\| = 1, \; i = 1, \ldots, n.$$

Rzut wektora v w kierunku wektora w będziemy oznaczać $proj(v, w)$:

$$proj(v, w) = \frac{< v, w >}{< w, w >} \cdot w.$$

Twierdzenie 2. Jeżeli $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - baza ortogonalna w V, to dla dowolnego $v \in V$ mamy

$$v = \frac{< v, u_1 >}{< u_1, u_1 >} \cdot u_1 + \cdots + \frac{< v, u_n >}{< u_n, u_n >} \cdot u_n.$$

W przypadku bazy ortonormalnej mamy zależność:

$$v =< v, u_1 > \cdot u_1 + \cdots + < v, u_n > \cdot u_n.$$

Twierdzenie 3. Ortogonalizacja Grama-Schmita. Niech $\{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie dowolną bazą w V. Istnieje $\{w_1, \ldots, w_n\}$ - ortogonalna baza w V określona następująco:

$$\begin{aligned}
&w_1 = v_1\\
&w_2 = v_2 - \frac{< v_2, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1\\
&w_3 = v_3 - \frac{< v_3, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >} \cdot w_2\\
&\vdots\\
&w_n = v_n - \frac{< v_n, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 - \cdots - \frac{< v_n, w_{n-1} >}{< w_{n-1}, w_{n-1} >} \cdot w_{n-1}.
\end{aligned}$$

Aby otrzymać bazę $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ortonormalną należy wektory w_i podzielić przez ich norme

$$u_i = \frac{1}{\|w_i\|} \cdot w_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Przykład 13. Niech $V = \mathbb{R}[t]$ będzie przestrzenią wielomianów określonych na przedziale $[-1, 1]$ w której określony jest iloczyn skalarny

$$< f(t), g(t) >= \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt.$$

Niech $W = \mathbb{R}_2[t]$ będzie zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej drugiego, wyznaczyć bazę ortogonalną w W. Bazą kanoniczną w przestrzeni W są wektory $\{e_1(t) = 1,\ e_2(t) = t,\ e_3(t) = t^2\}$ zastosujemy teraz metodę ortogonalizacji Grama-Schmita:

$$f_1(t) = e_1(t) = 1$$

$$f_2(t) = e_2(t) - \frac{< e_2(t), f_1(t) >}{< f_1(t), f_1(t) >} \cdot f_1(t) = t - \frac{\int_{-1}^{1} t \cdot 1dt}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1dt} \cdot 1 = t - \frac{0}{2} \cdot 1 = t$$

$$f_3(t) = e_3(t) - \frac{< e_3(t), f_1(t) >}{< f_1(t), f_1(t) >} \cdot f_1(t) - \frac{< e_3(t), f_2(t) >}{< f_2(t), f_2(t) >} \cdot f_2(t) =$$

$$t^2 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2 \cdot 1dt}{\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1dt} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2 \cdot tdt}{\int_{-1}^{1} t \cdot tdt} \cdot t = t^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - \frac{0}{2/3} \cdot t = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Baza ortogonalna w W ma postać

$$\{\ f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t,\ f_3(t) = t^2 - \frac{1}{3}\ \}.$$

Chcąc otrzymać bazę ortonormalną mnożymy funkcje $f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t)$ przez odwrotność ich norm:

$$\hat{f}_1(t) = \frac{1}{\|f_1(t)\|} f_1(t),\ \ \hat{f}_2(t) = \frac{1}{\|f_2(t)\|} f_2(t),\ \ \hat{f}_3(t) = \frac{1}{\|f_3(t)\|} f_3(t).$$

Uwaga 13. Wektory ortogonalne różne od zera są liniowo niezależne. Istotnie, niech $\mathcal{S} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie zbiorem wektorów ortogonalnych różnych od zera. Niech

$$k_1 \cdot u_1 + k_1 \cdot u_1 + \cdots + k_n \cdot u_n = 0. \tag{19}$$

Bierzemy iloczyn skalarny wektora z (19) z wektorem u_i:

$$0 =< 0, u_i >=< \sum_1^n k_j \cdot u_j,\ u_i >= \sum_1^n k_j < u_j, u_i >= k_i < u_i, u_i >= k_i \cdot \|u_i\|.$$

Ponieważ $\|u_i\| \neq 0$ więc $k_i = 0$ co dowodzi, że wektory z $\mathcal{S}$ są liniowo niezależne.

Uwaga 14. Dla wektorów ortogonalnych zachodzi prawo Pitagorasa:

$$\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2.$$

Istotnie

$$\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 =< v_1 + \cdots + v_n,\ v_1 + \cdots + v_n >=< u_1, u_1 > + \cdots + < v_n, v_n >$$
$$+ \sum_{i \neq j} < u_i, u_j >=< u_1, u_1 > + \cdots + < v_n, v_n >= \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2.$$

Twierdzenie 4 o najlepszej aproksymacji. Niech W będzie podprzestrzenią wektorową przestrzeni wektorowej V z iloczynem skalarnym $<,>$ i niech $\mathcal{S}_{\mathcal{W}} = \{w_1, \ldots, w_r\}$ - baza ortogonalna W. Dla dowolnego $v \in V$ definiujemy

$$c_i = \frac{< v, w_i >}{< w_i, w_i >}.$$

Wtedy dla dowolnych liczb $k_1, \ldots, k_r$ mamy

$$\|v - \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot w_i\| \leqslant \|v - \sum_{i=1}^{r} k_i \cdot w_i\|.$$

Czyli najbliżej wektora v w przestrzeni W jest wektor

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \cdot w_i.$$

Dowód. Wektor $v - \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot w_i$ jest ortogonalny do każdego z wektorów $w_j,\ j = 1, \ldots, j$. Istotnie

$$< v - \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot w_i, w_j > = < v, w_j > - \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot < w_i, w_j > = < v, w_j > - c_j < w_j, w_j >$$
$$= < v, w_j > - \frac{< v, w_j >}{< w_j, w_j >} \cdot < w_j, w_j > = 0.$$

Stąd wynika, że wektory

$$v - \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot w_i, \qquad \sum_{i=1}^{r} (c_i - k_i) w_i$$

są ortogonalne. Z własności Pitagorasa mamy

$$\|v - \sum_{i=1}^{r} k_i \cdot w_i\|^2 = \|v - \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot w_i + \sum_{i=1}^{r} (c_i - k_i) w_i\|^2 = \|v - \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot w_i\|^2$$
$$+ \|\sum_{i=1}^{r} (c_i - k_i) w_i\|^2 \geqslant \|v - \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot w_i\|^2.$$

Przykład 14. Niech $V = \mathbb{R}[t]$ będzie przestrzenią wielomianów określonych na przedziale $[-1, 1]$ w której określony jest iloczyn skalarny

$$< f(t), g(t) > = \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)\, dt.$$

Niech $W = \mathbb{R}_2[t]$ będzie zbiorem wielomianów stopnia co najwyżej drugiego z bazą ortogonalną

$$\{\ f_1(t) = 1,\ f_2(t) = t,\ f_3(t) = t^2 - \frac{1}{3}\ \}.$$

wyznaczoną w przykładzie (13). Dla wielomianu $g(t) = t^3 + t^2 - 1$ znaleźć najbliższy wielomian $w(t) \in W$ (w normie określonej przez iloczyn skalarny w V) .

Z twierdzenia 4 najbliższym wielomianem jest wielomian:

$$w(t) = c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) + c_3 \cdot f_3(t)$$

gdzie

$$c_1 = \frac{< g(t), f_1(t) >}{< f_1(t), f_1(t) >}, \quad c_2 = \frac{< g(t), f_2(t) >}{< f_2(t), f_2(t) >}, \quad c_3 = \frac{< g(t), f_3(t) >}{< f_3(t), f_3(t) >}.$$

Ponieważ

$$< g, f_1 >= \int_{-1}^{1} (t^3 + t^2 - 1)dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} - t\,|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

$$< g, f_2 >= \int_{-1}^{1} (t^3 + t^2 - 1)tdt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2}\,|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$< g, f_3 >= \int_{-1}^{1} (t^3 + t^2 - 1)(t^2 - \frac{1}{3})dt = \frac{t^6}{6} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^4}{12} - \frac{4}{9}t^3\,|_{-1}^{1} = \frac{22}{45}$$

$$< f_1, f_1 >= \int_{-1}^{1} dt = t|_{-1}^{1} = 2$$

$$< f_2, f_2 >= \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{t^3}{3}|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$< f_3, f_3 >= \int_{-1}^{1} (t^2 - \frac{1}{3})(t^2 - \frac{1}{3})dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2}{9}t^3 + \frac{1}{9}t|_{-1}^{1} = \frac{4}{45}.$$

Zatem

$$c_1 = \frac{2}{3}, \quad c_2 = \frac{3}{5}, \quad c_3 = \frac{11}{2}$$

więc

$$w(t) = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \cdot t + \frac{11}{2} \cdot (t^2 - \frac{1}{3}).$$

Wartości własne odwzorowań liniowych.

Niech V- bedzie przestrzenią wektorową i niech $L : V \to V$ będzie odwzorowaniem liniowym.

Definicja. Mówimy, że λ jest wartością własną odwzorowania L jeżeli istnieje $\lambda \in \mathbb{C}$, że równanie:

$$L(v) = \lambda \cdot v$$

ma niezerowe rozwiązanie.

Uwaga 15. Zbiór

$$V_\lambda = \{v \in V : \ L(v) = \lambda \cdot v\}$$

jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni V.
Istotnie, jeżeli u_1, $v_2 \in V_\lambda$ to

$$L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2) = \lambda \cdot u_1 + \lambda \cdot u_2 = \lambda \cdot (u_1 + u_2)$$

więc $u_1 + u_2 \in V_\lambda$.
Jeżeli $u \in V_\lambda$ i $k \in \mathbb{C}$ to

$$L(k \cdot u) = k \cdot L(u) = \lambda \cdot (k \cdot u)$$

więc $k \cdot u \in V_\lambda$. Zatem V_λ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej V.

Uwaga 16. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ z bazą $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i niech A bedzie macierzą odwzorowania L w bazie $\mathcal{B}$.
Jeżeli λ jest wartością własną odwzorowania L a wektor v oddpowiadającym jej wektorem własnym to λ jest wartością własną macierzy A:

$$A \cdot [v]_\mathcal{B} = \lambda \cdot [v]_\mathcal{B}$$

gdzie $[v]_\mathcal{B}$ jest macierzą jednokolumnową współrzednych wektora v w bazie $\mathcal{B}$.
Stąd wynika, że wyznaczanie watrości własnych i podprzestrzeni własnych odwzorowania liniowego L jest równoważne wyznaczaniu wartości własnych i podprzestrzeni własnych macierzy tego odwzorowania.
Dowód. Niech

$$L(v) = \lambda \cdot v, \quad [v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Ponieważ

$$v = x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n \tag{20}$$

więc z liniowości odwzorowania L, (19) i (20) mamy
(21)

$$\begin{aligned} L(v) &= x_1 L(v_1) + \cdots + x_n L(v_n) = x_1(a_{11}v_1 + \cdots a_{n1}v_n) + \cdots + x_1(a_{n1}v_1 + \cdots a_{nn}v_n) \\ &= (x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{1n})v_1 + \cdots + (x_1 a_{n1} + \cdots + x_n a_{n1})v_n. \end{aligned}$$

Z pierwszej równości w (19) i (21) porównując współczynniki przy wektorach bazowych dostajemy układ równań

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n} = \lambda x_1 \\ x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots + x_n a_{2n} = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_n a_{nn} = \lambda x_n \end{cases}$$

Przenosząc wszystko na lewą stronę otrzymamy układ

$$\begin{cases} x_1(a_{11} - \lambda) + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n} = 0 \\ x_1 a_{21} + x_2(a_{22} - \lambda) + \cdots + x_n a_{2n} = 0 \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} + x_2 a_{n2} + \cdots + x_n(a_{nn} - \lambda) = 0 \end{cases}$$

Układ ten można zapisać następująco

$$(A - \lambda I) \cdot X = 0, \quad \text{gdzie} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że λ jest wartością własną macierzy A a $[v]_{\mathcal{B}}$ jest wektorem własnym dla wartości własnej λ co kończy dowód uwagi.

Przykład 15. Niech $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bedzie odwzorowaniem liniowym określonym nastepująco

$$L(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_3, 2x_2 + x_3).$$

Wyznaczyć wartości własne i podprzestrzenie własne tego odwzorowania. W pierwszej kolejności wyznaczymy macierz odwzorowania w bazach kanonicznych .Ponieważ

$$L(1,0,0) = (1,0,0), \quad L(0,1,0) = (1,0,1), \quad L(0,0,1) = (0,2,1)$$

więc kolumnami macierz odwzorowania L są współrzedne wektorów $L(1,0,0)$, $L(0,1,0)$, $L(0,0,1)$ w bazie kanoniczej

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Teraz wyznaczymy wartości własne macierzy A

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0.$$

Zatem $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2$. Wyznaczymy teraz podprzestrzenie własne :

1. Dla $\lambda_1 = 1$

$$V_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} :\ (A - I) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_2 + 2x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $x_2 = 0,\ x_3 = 0$ a x_1 może być dowolne, zatem

$$V_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_1 jest generowana przez wektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Dla $\lambda_2 = -1$

$$V_{-1} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} :\ (A + I) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $x_2 = -2x_3,\ x_1 = x_3$ gdzie x_3 może być dowolne, zatem

$$V_{-1} = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_{-1} jest generowana przez wektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Dla $\lambda_3 = 2$

$$V_2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ (A - 2I) \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ -2x_2 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $x_2 = x_3,\ x_1 = x_2 = x_3$ gdzie x_3 może być dowolne, zatem

$$V_2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_2 jest generowana przez wektor $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ponieważ wektory odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne, więc wektory v_1, v_2, v_3 stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Uwzględniając, że

$$L(v_1) = \lambda_1 \cdot v_1, \quad L(v_2) = \lambda_2 \cdot v_2, \quad L(v_3) = \lambda_3 \cdot v_3$$

macierz odwzorowania L w bazie $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ ma postać diagonalną

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kolumnami macierz przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do bazy kanonicznej $\mathcal{K}$ są współrzędne wektorów własnych:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Między macierzami A i D zachodzi następujący związek

$$A = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} \cdot D \cdot P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}}.$$

Przykład 16 Niech $L : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}_2[t]$ bedzie odwzorowaniem liniowym określonym nastepująco:

$$L(w(t)) = w(t) + (1+t) \cdot w'(t)$$

gdzie $\mathbb{R}_2[t]$ - jest przestrzenią wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.
W $\mathbb{R}_2[t]$ przyjmujemy bazę kanoniczną $\mathcal{K} = \{e_1(t) = 1,\, e_2(t) = t,\, e_3(t) = t^2\}$.
Wyznaczamy macierz odwzorowania L w tej bazie $\mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} L(e_1(t)) &= 1 + (1+t) \cdot 1' = 1 \\ L(e_2(t)) &= t + (1+t) \cdot t' = 1 + 2t \\ L(e_3(t)) &= t^2 + (1+t) \cdot (t^2)' = 2t + 3t^2 \end{aligned}$$

więc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Teraz wyznaczymy wartości własne macierzy A

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot (2-\lambda)(3-\lambda) = 0.$$

Zatem $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$. Wyznaczymy teraz podprzestrzenie własne :

1. Dla $\lambda_1 = 1$

$$V_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} :\ (A - I) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $x_2 = 0,\ x_3 = 0$ a x_1 może być dowolne, zatem

$$V_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_1 jest generowana przez wektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Dla $\lambda_1 = 2$

$$V_2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ (A - 2I) \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $x_3 = 0,\ x_1 = x_2$ a x_2 może być dowolne, zatem

$$V_2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x_2, \quad x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_2 jest generowana przez wektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Dla $\lambda_1 = 3$

$$V_3 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ (A - 3I) \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + x_2 \\ -x_2 + 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $x_2 = 2x_3,\ x_1 = x_3 = 0$ a x_3 może być dowolne, zatem

$$V_3 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_3 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3, \quad x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_3 jest generowana przez wektor $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ponieważ wektory odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne, więc wektory v_1, v_2, v_3 stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Stąd wynika, że wektory $v_1(t) = 1$, $v_2 = 1 + t$, $v_3 = 1 + 2t + t^2$ stanowia bazę w przestrzeni $\mathbb{R}_2[t]$. Uwzględniając, że

$$L(v_1(t)) = \lambda_1 \cdot v_1(t), \quad L(v_2(t)) = \lambda_2 \cdot v_2(t), \quad L(v_3(t)) = \lambda_3 \cdot v_3(t)$$

macierz odwzorowania L w bazie $\mathcal{B} = \{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\}$ ma postać diagonalną

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kolumnami macierz przejścia z bazy $\mathcal{B}$ do bazy kanonicznej $\mathcal{K}$ są współrzędne wektorów własnych:

$$P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Między macierzami A i D zachodzi następujący związek

$$A = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}} \cdot D \cdot P^{-1}_{\mathcal{B}\to\mathcal{K}}.$$

Macierze symetryczne.

Ponieważ macierze symetryczne bardzo często pojawiają sie w zastosowaniach więc poświęcimy im trochę uwagi.
Macierz kwadratową A nazywamy **symetryczną**, jeżeli jest równa swojej macierzy transponowanej, tj. zachodzi warunek $A = A^T$.

Twierdzenie 5.
Niech A będzie macierzą rzeczywistą symetryczna i niech λ będzie wartością własną. Wtedy λ jest liczbą rzeczywistą. Jeżeli Z jest zespolonym wektorem własnym odpowiadającącym wartości własnej λ, i $Z = X + iY$ gdzie $X, Y \in \mathbb{R}^n$ to X i Y są rzeczywistymi wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej λ.
Dowód. Z warunków twierdzenia mamy

$$A \cdot Z = \lambda \cdot Z. \tag{22}$$

Wyrażenie $\bar{Z}^T \cdot A \cdot Z$ jest macierzą 1×1, macierz transponowana takiej macierzy jest tą samą macierzą. Z (22) mamy

$$\bar{Z}^T \cdot A \cdot Z = \bar{Z}^T \cdot \lambda \cdot Z = \lambda \cdot \bar{Z}^T \cdot Z \tag{23}$$

$$\bar{Z}^T \cdot A \cdot Z = (\bar{Z}^T \cdot A \cdot Z)^T = Z^T \cdot A^T \cdot \bar{Z} = Z^T \cdot A \cdot \bar{Z}. \tag{24}$$

Ponieważ macierz A rzeczywista więc $\bar{A} = A$ i

$$\overline{A \cdot Z} = \bar{A} \cdot \bar{Z} = A \cdot \bar{Z}$$

i

$$\overline{A \cdot Z} = \overline{\lambda \cdot Z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{Z}$$

zatem

$$A \cdot \bar{Z} = \bar{\lambda} \cdot \bar{Z}.$$

Stąd i (24) mamy

$$\bar{Z}^T \cdot A \cdot Z = Z^T \cdot A \cdot \bar{Z} = Z^T \cdot \bar{\lambda} \cdot \bar{Z} = \bar{\lambda} \cdot Z^T \cdot \bar{Z}. \tag{25}$$

Zauważmy, że

$$Z^T \cdot \bar{Z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \cdot \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \bar{Z}^T \cdot Z \neq 0.$$

Zatem z (23) i (25) mamy, że $\lambda = \bar{\lambda}$ czyli λ jest liczbą rzeczywistą. Z (22) mamy

$$A \cdot Z = A \cdot (X + iY) = \lambda \cdot (X + iY) = \lambda \cdot X + i\lambda \cdot Y.$$

Ponieważ λ jest rzeczywistą liczbą więc

$$A \cdot X = \lambda \cdot X, \quad A \cdot Y = \lambda \cdot Y.$$

Zatem X i Y są rzeczywistymi wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej λ.

Twierdzenie 6. Wektory własne macierzy symetrycznej odpowiadające różnym wartościom własnym są ortogonalne.

Dowód. Niech A będzie macierzą symetryczną i λ, μ różnymi wartościami własnymi a X, Y odpowiadającymi im wektorami własnymi:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X, \quad A \cdot Y = \lambda \cdot Y. \tag{26}$$

Z (26) mamy

$$X^T \cdot A \cdot Y = X^T \cdot \mu \cdot Y = \mu \cdot X^T \cdot Y \tag{27}$$

Ponieważ wyrażenie $X^T \cdot A \cdot Y$ jest macierzą 1×1, więc macierz transponowana jest tą samą macierzą. Stąd i (26) mamy

$$X^T \cdot A \cdot Y = (X^T \cdot A \cdot Y)^T = Y^T \cdot A \cdot X = Y^T \cdot \lambda \cdot X = \lambda \cdot Y^T \cdot X. \tag{28}$$

Ponieważ

$$< X, Y >= X^T \cdot Y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Y^T \cdot X.$$

Stąd uwzgledniając (27) i (28) mamy zależności

$$\mu \cdot X^T \cdot Y = \lambda \cdot Y^T \cdot X \Longleftrightarrow (\mu - \lambda) \cdot < X, Y >= 0.$$

Ponieważ $\lambda \neq \mu$ więc $< X, Y >= 0$ czyli wektory własne są ortogonalne.

Ortogonalne macierze.

Macierz kwadratowa A jest ortogonalna jeżeli

$$A^{-1} = A^T.$$

Wektory u, v są **ortonormalne** jezeli są ortogonalne $< u, v >= 0$ i mają długość $\|u\| = \|v\| = 1$.

Twierdzenie 7. Następujące warunki są równoważne dla macierzy A wymiaru $n \times n$:

1. Macierz A jest ortogonalna
2. Macierz A^T jest ortogonalna
3. Wektory utworzone z wierszy macierzy A są ortonormalne w $\mathbb{R}^n$
4. Wektory utworzone z kolumn macierzy A są ortonormalne w $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 8.

1. Macierz odwrotna do macierzy ortogonalnej jest macierza ortogonalną
2. Iloczyn macierzy ortogonalnych jest macierzą otrogonalną
3. Jeżeli A jest ortogonalna to $\det(A) = 1$ lub $\det(A) = -1$.

Twierdzenie 9. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Jeżeli P jest macierzą przejścia z jednej bazy ortonormalnej w V do drugiej bazy ortonormalnej w V to P jest macierzą ortogonalną.

Ortogonalna diagonalizacja.

Definicja . Mówimy, że macierze A i B są ortogonalnie podobne jezeli istnieje orogonalna macierz P taka, że

$$P^T AP = B.$$

Jeżeli macierz A jest ortogonalnie podobna do macierzy diagonalnej D:

$$P^T AP = D$$

wtedy mówimy, że jest ortogonalnie diagonalizowana.

Określimy sobie warunki jakie musi spełniać macierz A by była ortogonalnie diagonalizowana. Najpierw pokazemy, że nie można ortogonalnie diagonalizować macierzy która nie jest symetryczna.
Przypuśćmy, że

$$P^T AP = D \tag{29}$$

gdzie D macierz diagonalna. Mnożymy równanie (29) z lewej strony przez macierz P a z prawej strony przez P^T i uwzgledniając zależność $PP^T = I$ otrzymamy

$$A = PDP^T. \tag{30}$$

Z (30) uwzględniając $D^T = D$ dokonując transpozycji otrzymamy

$$A^T = (PDP^T)^T = PD^TP^T = PDP^T.$$

Stąd i (30) mamy $A = A^T$, czyli macierz A musi być symetryczna.

Twierdzenie 7. Następujące warunki są równoważne dla macierzy A wymiaru $n \times n$:

1. Macierz A jest ortogonalnlnie diagonalizowana
2. Dla macierzy A istnieje n ortonormalnych wektorów własnych
3. Macierz A jest symetryczna
4. Dla każdej wartości własnej, wymiar odpowiadającej jej podprzestrzeni własnej jest równy jej krotności.

Algorytm ortogonalnej diagonalizacji.

1. Wyznaczamy wartości własne macierzy A
2. Dla każdej podprzestrzeni własnej wyznaczamy bazę ortonormalną, w przypadku gdy wymiar jest większy niż jeden stosujemy ortogonalizację Grama-Schmita.
3. Definiujemy macierz P której kolumnami są wektory skonstruowane w punkcie 2. Tak określona macierz P ortogonalnie diagonalizuje macierz A i wartości własne na przekątnej macierzy $D = P^TAP$ są w takiej samej kolejności jak odpowiadające im wektory własne w P.

Przykład 17. Macierz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

ortogonalnie zdaigonalizować.
Wyznaczamy wartości własne macierzy A

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda) \cdot (2-\lambda)^2 = 0.$$

Zatem $\lambda_1 = 8$- jednokrotna wartość własna i $\lambda_2 = 2$- dwukrotna wartość własna. Wyznaczymy teraz podprzestrzenie własne :

1. Dla $\lambda_1 = 8$

$$V_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ (A - 8I) \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $x_1 = x_2 = x_3$, zatem

$$V_1 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_1, \quad x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_1 jest generowana przez wektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ortonormalizujemy ten wektor czyli dzielimy przez długość $\|v_1\| = \sqrt{3}$ więc

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

2. Dla $\lambda_1 = 2$

$$V_2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \ (A - 2I) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stąd wynika, że $x_3 = -x_1 - x_2$ a x_1, x_2 mogą być dowolne, zatem

$$V_2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Przestrzeń V_2 jest generowana przez wektory $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Przeprowadziemy teraz ortogonalizacje Grama-Schmita dla wektorów v_2, v_3:

$$w_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_3 = v_3 - \frac{< v_3, w_2 >}{< w_2, w_2 >} \cdot w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Teraz przeprowadzimy normalizację wektorów w_2 i w_3:

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Definiujemy macierz P:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Macierz D ma postać

$$D \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

i spełniona jest zależność $P^T AP = D$.

Przykładami macierzy symetrycznych są macierz naprężeń i macierz bezwładności.