Zagadnienia brzegowe dla równania różniczkowego drugiego rzędu.

Zakładamy, że funkcje p, q : $[a,b]->\mathbb{R}$ są ciągłe i α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in \mathbb{R}$. Definiujemy operator różniczkowy

$$L[x](t) := x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t), \quad t \in [a,b]$$

i oeratory brzegowe

$$B_1[x] := \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a), \quad B_2[x] := \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b).$$

Rozważmy następujące zagadnienie brzegowe

(1) $$L[x](t) = f(t), \quad B_1[x] = A_1, \quad B_2[x] = A_2,$$

gdzie $f : [a,b]->\mathbb{R}$, A_1, $A_2 \in \mathbb{R}$ są dane.
Zagadnienie jednorodne stowarzyszone z zagadnieniembrzegowym ma postać:

(2) $$L[x](t) = 0, \quad B_1[x] = 0, \quad B_2[x] = 0.$$

Założenie A.
(i) p, $q \in C([a,b], \mathbb{R})$,
(ii) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.

Twierdzenie 1. Jeżeli spełnione jest załozenie A i jedynym rozwiązaniem zagadnienia jednorodnego (2) jest $x(t) \equiv 0$, to zagadnienie (1) ma rozwiązanie dla dowolnej funkcji $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ i dla dowolnych stałych A, B. Rozwiązanie jest dokładnie jedno.
Dowód
Niech funkcje $\{x_1(t), x_2(t)\}$ stanowią układ fundamentalny rozwiązań równania różniczkowego

(3) $$L[x](t) = 0.$$

Niech funkcja $y(t)$ bedzie jednym z rozwiazań równania

(4) $$L[y](t) = f(t).$$

Rozwiązanie ogólne równania (4) ma postać

$$Y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + y(t), \quad t \in [a,b]$$

Funkcja Y spełnia warunki brzegowe w (1) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\alpha_1[c_1x_1(a) + c_2x_2(a) + y(a)] + \alpha_2[c_1x_1'(a) + c_2x_2'(a) + y'(a)] = A_1$$

$$\beta_1[c_1x_1(b) + c_2x_2(b) + y(b)] + \beta_2[c_1x_1'(b) + c_2x_2'(b) + y'(b)] = A_2.$$

Stałe c_1, c_2 wyznaczamy z układu równań:

$$\begin{bmatrix} B_1[x_1] & B_1[x_2] \\ B_2[x_1] & B_2[x_2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 - B_1[y] \\ A_2 - B_2[y] \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie ponieważ

$$\det \begin{bmatrix} B_1[x_1] & B_1[x_2] \\ B_2[x_1] & B_2[x_2] \end{bmatrix} \neq 0,$$

a wynika to z tego, że problem (2) ma dokładnie jedno rozwiązanie $x(t) \equiv 0$. Kończy to dowód, że problem (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Uwaga Każdy liniowy operator rzedu drugiego

$$L = a_2(t)\frac{d^2}{dt^2} + a_1(t)\frac{d}{dt} + a_0(t)$$

może zostać przekształcony do postaci Sturma-Liouville'a

$$L = \frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{d}{dt}\right) + q(t).$$

Dowód Dla równania

$$a_2(t)x''(t) + a_1(t)x'(t) + a_0x(t) = f(t) \tag{$*$}$$

poszukamy czynnika całkującego $\mu(t)$. Mnożymy obustronnie powyższe równanie przez $\dfrac{\mu(t)}{a_2(t)}$

$$\mu(t)x''(t) + \mu(t)\frac{a_1(t)}{a_2(t)}x'(t) + \mu(t)\frac{a_0(t)}{a_2(t)}x(t) = \mu\frac{f(t)}{a_2(t)}.$$

Szukamy funkcji $\mu(t)$ dla której będzie zachodziła zależność:

$$\mu(t)x''(t) + \mu(t)\frac{a_1(t)}{a_2(t)}x'(t) = (\mu(t)x'(t))' = \mu'(t)x'(t) + \mu(t)x''(t).$$

Stąd mamy zależność:

$$\mu(t)\frac{a_1(t)}{a_2(t)} = \mu'(t)$$

która jest równaniem o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = \frac{a_1(t)}{a_2(t)}.$$

Całkując powyższą równość dostajemy

$$\mu(t) = \exp(\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\, dt).$$

Zatem równanie (*) można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx}{dt}(t)\right) + q(t)x(t) = F(t),$$

gdzie

$$p(t) = \exp(\int \frac{a_1(t)}{a_2(t)}\, dt), \quad q(t) = p(t)\frac{a_0(t)}{a_2(t)}, \quad F(t) = p(t)\frac{f(t)}{a_2(t)}.$$

Funkcja Greena operatora różniczkowego
Rozważmy następujące równanie z warunkami brzegowymi

(1) $$\frac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t) = f(t), \quad t \in [a, b],$$

(2) $$\alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0, \quad \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0.$$

Załozenie B
(i) f, $q \in C([a, b], \mathbb{R})$, $\quad p \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, $p(t) \neq 0$ dla $t \in [a, b]$
(ii) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$L[x](t) = \frac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + q(t)x(t), \ \ t \in [a, b]$$

$$B_1[x] := \alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a), \quad B_2[x] := \beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b).$$

Niech $G : [a, b] \times [a, b] -> \mathbb{R}$, $G(t, s)$.

Mówimy, że G- jest **funkcja Greena** dla operatora L i operatorów brzegowych B_1, B_2, jeśli:
(i) G- ciągła na $[a,b] \times [a,b]$, G - ma ciągłe pochodne pierwszego i drugiego rzędu względem t dla $t \in [a,b]$ i $t \neq s$
(ii) $\frac{\partial G}{\partial t}$ - ma nieciągłość dla $t = s$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s+0,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}, \; s \in [a,b]$$

(iii) dla ustalonego s funkcja $G(\cdot,s)$ spełnia warunki brzegowe (2) oraz $L(G(\cdot,s))(t) = 0, \; t \in [a,b] \setminus \{s\}$.
Twierdzenie
Jesli spełnione jest załozenie B i G jest funkcją Greena, to funkcja

$$F(t) = \int_a^b G(t,s) \cdot f(s)ds, \quad t \in [a,b] \tag{3}$$

jest rozwiazaniem problemu (1), (2)
Dowód
Obliczamy pochodne pierwszego i drugiego rzedu funkcji F. Mamy

$$F(t) = \int_a^t G(t,s) \cdot f(s)ds + \int_t^b G(t,s) \cdot f(s)ds.$$

Stąd otrzymujemy

$$F'(t) = \int_a^t \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \cdot f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \cdot f(s)ds + G(t,t-0) \cdot f(t) - G(t,t+0) \cdot f(t).$$

Ponieważ $G(t,t-0) = G(t,t+0)$, więc

$$F'(t) = \int_a^t \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \cdot f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \cdot f(s)ds = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \cdot f(s)ds.$$

Stąd mamy

$$F''(t) = \int_a^t \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s) \cdot f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s) \cdot f(s)ds + \frac{\partial G}{\partial t}(t,t-0) \cdot f(t) - \frac{\partial G}{\partial t}(t,t+0) \cdot f(t).$$

Z (ii) wynika, że

$$F''(t) = \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s) \cdot f(s)ds + \frac{f(t)}{p(t)}, \quad t \in [a,b].$$

Ponieważ funkcja $G(\cdot, s)$ spełnia warunki brzegowe (2), więc F też spełnia te warunki. Z powyższych zależności i (iii) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
L[F](t) =& p(t)F''(t) + p(t)F'(t) + q(t)F(t) = p(t) \cdot \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s) \cdot f(s)ds \\
&+ f(t) + p'(t) \cdot \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) \cdot f(s)ds + q(t) \cdot \int_a^b G(t,s) \cdot f(s)ds \\
&= \int_a^b L[G(\cdot,s)](t) \cdot f(s)ds + f(t) = f(t), \quad t \in [a,b].
\end{aligned}
$$

Zatem F spełnia równanie (1) i warunki brzegowe (2).

Twierdzenie
Zakładamy, że spełnione są założenia B i
(i) $G : [a,b] \times [a,b] -> \mathbb{R}$ jest funkcja Greena dla operatorów L, B_1, B_2
(ii) $u : [a,b] -> \mathbb{R}$ -jest funkcja klasy C^2 taką, że

$$B_1[u] = A_1, \quad B_2[u] = A_2$$

i funkcja $F : [a,b] -> \mathbb{R}$ dana jest wzorem (3).
Wtedy funkcja $y(t) = F(t) + u(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia brzegowego

$$L[y](t) = f(t) + L[u](t), \quad B_1[y] = A_1, \quad B_2[y] = A_2.$$

Dowód
Teza wynika z zależności:

$$L[y](t) = L[F](t) + L[u](t) = f(t) + L[u](t),$$

$$B_1[y] = B_1[F] + B_1[u] = A_1, \quad B_2[y] = B_2[F] + B_2[u] = A_2.$$

Metoda konstrukcji funkcji Greena.
Zakładamy, że spełnione jest założenie B oraz, że jedynym rozwiązaniem zagadnienia brzegowego jednorodnego

$$L[x] = 0, \quad B_1[x] = 0, \quad B_2[x] = 0 \tag{4}$$

jest funkcja zerowa.
Niech $\varphi_1 : [a,b] -> \mathbb{R}$ i $\varphi_2 : [a,b] -> \mathbb{R}$ będą odpowiednio niezerowymi rozwiązaniami problemów:

$$L[x] = 0, \quad B_1[x] = 0$$

i

$$L[x] = 0, \quad B_2[x] = 0.$$

Każde z tych zagadnień ma wiele rozwiązań. Wybieramy po jednym, niezerowym rozwiązaniu każdego zagadnienia.
Istnienie rozwiązań φ_1 i φ_2 wynika z twierdzenia o rozwiązalności problemów początkowych dla równań liniowych rzędu drugiego.
Funkcje φ_1 i φ_2 są liniowo niezależne. Gdyby bowiem były zależne wtedy

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = 0, \quad t \in [a,b], \text{ gdzie } \quad c_1^2 + c_2^2 > 0,$$

stąd jeżeli np. $c_1 \neq 0$ wtedy funkcja niezerowa $\varphi_1(t) = -\frac{c_2}{c_1}\varphi_2(t)$ jest rozwiazaniem zagadnienia (4), co jest niemożliwe.
Definiujemy

$$G(t,s) = \begin{cases} g_1(s) \cdot \varphi_1(t), & a \leqslant t \leqslant s \leqslant b \\ g_2(s) \cdot \varphi_2(t), & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b \end{cases}$$

funkcje g_1, $g_2 : [a,b]- > \mathbb{R}$ wyznaczamy tak by funkcja $G(t,s)$ spełniała założenia dla funkcji Greena.
Warunek (i) o ciągłości prowadzi do równania

(5) $$g_1(s) \cdot \varphi_1(t) = g_2(s) \cdot \varphi_2(t), \quad s \in [a,b]$$

Warunek (ii) nieciągłości pierwszej pochodnej daje równanie

(6) $$g_2(s) \cdot \varphi_2(t) - g_1(s) \cdot \varphi_1(t) = \frac{1}{p(s)}$$

Rozwiązując układ (5) i (6) otrzymujemy

$$g_1(s) = \frac{\varphi_2(s)}{p(s)W(s)}, \quad s \in [a,b]$$

$$g_2(s) = \frac{\varphi_1(s)}{p(s)W(s)}, \quad s \in [a,b]$$

gdzie

$$W(s) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \end{bmatrix}.$$

Wykażemy teraz, że

(7) $$p(t)W(t) = const \quad \text{dla} \quad t \in [a,b].$$

Ponieważ

$$\frac{d}{dt}[p(t)\varphi_1'(t)] + q(t)\varphi_1(t) = 0$$

i

$$\frac{d}{dt}[p(t)\varphi_2'(t)] + q(t)\varphi_2(t) = 0,$$

więc mnożąc pierwsze równanie przez $\varphi_2(t)$ a drugie przez $\varphi_1(t)$ i odejmując stronami otrzymamy

$$\varphi_2(t)\frac{d}{dt}[p(t)\varphi_1'(t)] - \varphi_1(t)\frac{d}{dt}[p(t)\varphi_2'(t)] = 0, \quad t \in [a,b].$$

Stąd wynika, że

$$p(t)[\varphi_2(t)\varphi_1''(t) - \varphi_1(t)\varphi_2''(t)] + p'(t)[\varphi_2(t)\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)\varphi_2'(t)] = 0, \quad t \in [a,b]$$

czyli

$$-\frac{d}{dt}[p(t)W(t)] = 0 \quad \text{dla} \quad t \in [a,b].$$

Stad wynika zależność (7). Przyjmując oznaczenie

$$p(t)W(t) \equiv c, \quad t \in [a,b].$$

Otrzymujemy więc następujące wzory na funkcję Greena:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\varphi_1(t)\varphi_2(s)}{c}, & a \leqslant t \leqslant s \leqslant b \\ \frac{\varphi_2(t)\varphi_1(s)}{c}, & a \leqslant s \leqslant t \leqslant b \end{cases}.$$

Zauważmy, że funkcja Greena jest symetryczna:

$$G(t,s) = G(s,t) \quad \text{na} \quad [a,b] \times [a,b].$$

Przykład 1.
Wyznaczyć funkcję Greena dla operatorów:

$$L[x](t) = x''(t) + x(t), \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$B_1[x] = x(0). \quad B_2[x] = x(\pi/2).$$

Wyznaczamy rozwiazanie ogólne równania:

$$x''(t) + x(t) = 0. \tag{8}$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

zatem $\lambda_1 = i, \;\; \lambda_2 = -i$, stąd

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t.$$

Rozwiazanie równania (8) przy warunku $x(0) = 0$ ma postać $x(t) = c_1 \sin t$, zatem przyjmujemy, że $\varphi_1(t) = \sin t$.
Rozwiazanie równania (8) przy warunku $x(\pi/2) = 0$ ma postać $x(t) = c_2 \cos t$, zatem przyjmujemy, że $\varphi_2(t) = \cos t$.
Ponieważ

$$W[\sin t, \cos t] = \det \begin{bmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{bmatrix} = -\sin^2 t - \cos^2 t = -1,$$

zatem

$$G(t,s) = \begin{cases} -\sin t \cdot \cos s, & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant \pi/2 \\ -\sin s \;\; \cdot \cos t, & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \pi/2 \end{cases} .$$